MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

Pietrani

Vacanța de vară - august 2004

Cuprins

Capitolul 1 *Probleme recreative* *2*

Capitolul 2 *Proprietățile cifrei 9* *49*

Capitolul 3 *Măsoară de mai multe ori şi taie odată* *55*

Capitolul 4 *Iscusința îşi găseşte pretutindeni folosința* *66*

Capitolul 5 *Cu şi fără ajutorul algebrei* *80*

Capitolul 6 *Divizibilitatea numerelor* *97*

Capitolul 7 *Matematica aproape fără calcule* *106*

Capitolul 8 *Jocuri şi trucuri matematice* *119*

Capitolul 9 *Dominoul şi zarul* *139*

Capitolul 10 *Iscusința geometrică în muncă* *151*

Capitolul 1 Probleme recreative

1. Elevii perspicaci

Doi elevi - un băiat şi o fată - terminaseră de efectuat nişte măsurători meteorologice. Acum se odihneau pe o colină şi priveau un tren de marfă care trecea prin fața lor. De-a lungul căii ferate vântul sufla uniform, fără rafale.

- Ce viteză a vântului au indicat măsurătorile noastre? - întrebă băiatul.

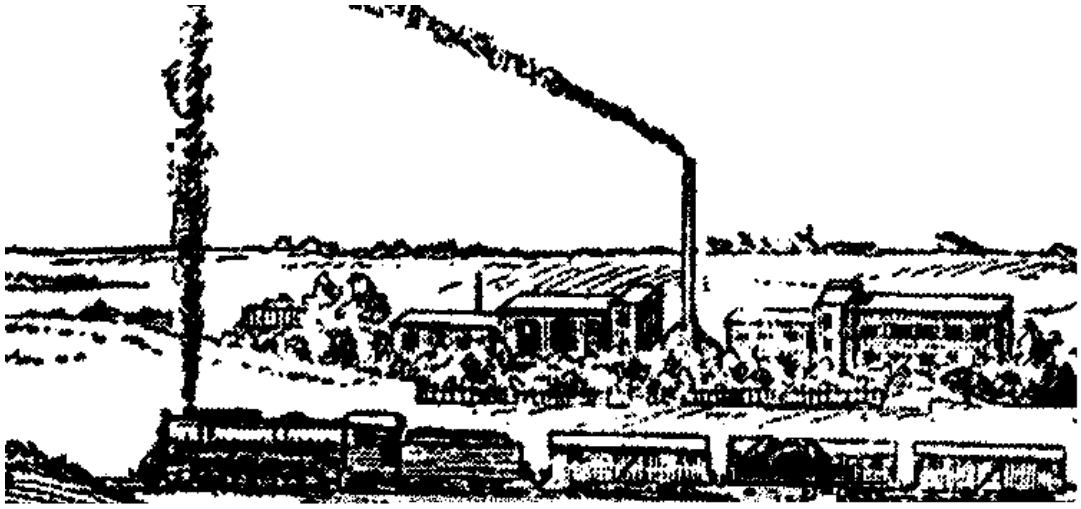
- 7 m/s.

- Astăzi această indicație îmi este suficientă pentru a stabili viteza cu care merge trenul.

- Vorbeşti serios?! - spuse fata, cu o uşoară îndoială în glas.

- N-ai decât să priveşti cu mai multă atenție mersul trenului.

După o clipă de gândire fata şi-a dat seama cum a aflat colegul ei viteza trenului. Iar de văzut, au văzut exact tabloul schițat de desenatorul nostru. Cu ce viteză mergea trenul?

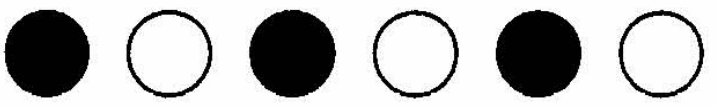


2. Permutarea tablelor

Luați 6 piese de table (monede, hârtiuțe sau cartonaşe), 3 albe şi 3 negre, şi aşezați-le alternativ, una neagră - una albă, aşa cum vede mai jos. În stânga sau în dreapta lăsați spațiu suficient ca să încapă patru piese. Piesele albe trebuie să fie în stânga, urmate de cele negre.

Se cere să mutați piesele în aşa fel, încât acestea să succeadă în ordinea culorilor: mai întâi în stânga cele trei piese albe, urmate de cele trei negre.

Aveți dreptul să mutați în spațiul liber numai câte două piese alăturate deodată. Pentru rezolvarea problemei sunt suficiente trei mutări.



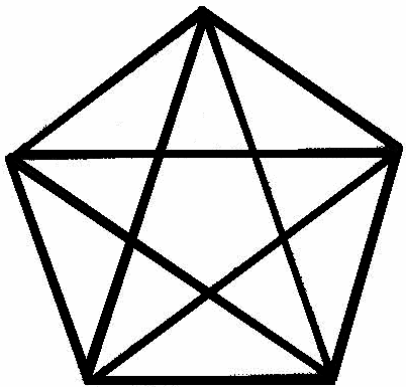
3. În trei mişcări

Aşezaţi pe masă 3 grămăjoare de chibrituri: prima - de 11, a doua - de 7, iar a 3-a - de 6 chibrituri. Mutând chibriturile din oricare grămăjoară în cealaltă se cere să le egalizaţi pe toate trei în aşa fel, încât fiecare să aibă câte 8 beţe de chibrit. Lucrul este posibil, deoarece numărul lor total 24, se împarte exact la 3; totodată trebuie să respectaţi următoarea regulă: aveţi voie să adăugaţi la fiecare grămadă numai atâtea chibrituri câte are ea.

De exemplu, la grămada de şase chibrituri puteţi adăuga numai alte 6; dacă într-o grămadă rămân 4 chibrituri, puteţi adăuga numai 4. Problema se rezolvă din 3 mutări.

4. Număraţi!

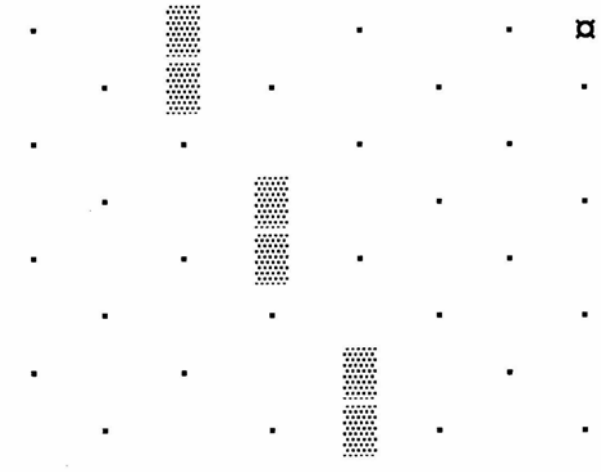
Verificaţi-vă spiritul de observaţie geometric: număraţi câte triunghiuri se găsesc în figura următoare:



5. Drumul grădinarului

Figura următoare descrie planul unei mici livezi de meri (punctele reprezintă merii). Grădinarul trebuie să îngrijească toţi pomii. El a început cu pătratul însemnat cu o steluţă şi a vizitat pe rând toate pătrăţelele - atât pe cele cu pomi cât şi pe cele libere - fără să treacă de două ori prin acelaşi pătrăţel. El nu a mers în diagonală şi nici nu a trecut prin pătrăţelele haşurate ocupate cu diferite construcţii. La terminarea drumului, grădinarul a ajuns în pătrăţelul de unde pornise.

Reconstituiţi pe caietul vostru drumul parcurs de grădinar.



6. Gândiți-vă puțin

Într-un coş sunt 5 mere. Cum trebuie împărțite aceste mere la 5 fetițe, în aşa fel încât fiecare să capete câte un măr, iar în coş să mai rămână unul?

7. Răspundeți repede

Răspundeți câte pisici sunt în odaie, dacă în fiecare din cele patru colțuri ale odăii se găseşte o pisică, în fața fiecărei pisici stau 3 pisici, iar pe fiecare coadă de pisică stă o pisică?

8. În sus şi în jos

Un băiat a alăturat strâns un creion albastru de altul galben. Pe latura lipită de creionul galben, creionul albastru este murdărit cu vopsea la unul din capete, pe o lungime de un centimetru. Băiatul ține nemişcat creionul galben, iar pe cel albastru continuând să-l țină lipit de cel galben, îl coboară cu 1 cm apoi îl readuce în poziția inițială, pentru ca să-l coboare iarăşi cu 1 cm şi să-l readucă din nou în poziția inițială; el a coborât creionul albastru de 10 ori şi l-a ridicat tot de 10 ori (în total 20 de mişcări).

Dacă vom admite că în acest timp vopseaua nu s-a uscat şi nici nu s-a şters, pe ce lungime (în centimetri) va fi murdărit cu vopsea creionul galben după mişcarea a 20-a?

9. Trecerea peste râu

Un mic detaşament de soldați trebuia să treacă peste un râu. Podul era rupt, iar râul adânc. Ce era de făcut? Deodată ofițerul zări lângă mal doi copii care se jucau cu o barcă. Barca era însă tare mică şi nu putea să țină decât un singur soldat sau pe cei doi copii. Totuşi, toți soldații au trecut râul cu ajutorul acestei luntrişoare.

Cum au procedat? Rezolvați această problemă „în minte" sau în mod practic, folosind piese de table, chibrituri sau orice alte obiecte, pe care le veți trece peste un râu imaginar.

10. Lupul, capra şi varza

Un om trebuia să treacă peste o apă un lup, o varză şi o capră. Avea la dispoziție o barcă în care nu încăpea decât el împreună cu unul din cele doua animale sau cu varza. Dacă rămâneau pe mal lupul şi capra, atunci lupul devora capra; dacă rămânea capra cu varza, atunci capra mânca varza. În prezența omului „nimeni nu mânca pe nimeni". Omul nostru a izbutit totuşi să-i treacă pe toți trei peste apă.

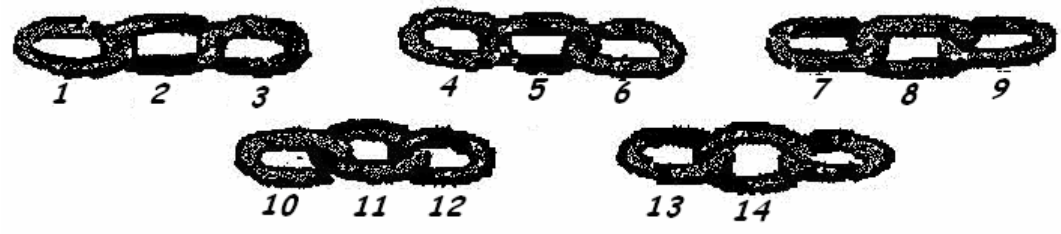
Cum a procedat el?

11. Repararea lanțului

Ştiți la ce se gândeşte tânărul fierar? Înaintea lui se află cinci grupuri de verigi care trebuie unite într-un singur lanț, fără să fie folosite verigi suplimentare. Dacă, de exemplu, va desface veriga 3 (o operație) şi va prinde de veriga 4 (încă o operație), iar apoi va desface veriga 6 şi o va prinde de veriga 7 ş.a.m.d., el va izbuti

să unească toate verigile în opt operațiuni. Fierarul nostru însă vrea să ferece lanțul numai în 6 operațiuni şi trebuie să spunem că a izbutit s-o facă.

Ştiți şi voi cum?



12. Îndreptați greşeala

Luați 12 chibrituri şi aşezați-le ca în figura de mai jos. După cum vedeți, egalitatea este greşită, deoarece rezultă că 6 - 4 = 9. Mutați un singur chibrit în aşa fel, încât egalitatea să fie corectă.



13. Din 3 faceți 4 (farsă)

Pe masă se găsesc 3 chibrituri. Fără să adăugați nici un chibrit, faceți din trei - patru. Nu aveți voie să rupeți chibriturile.

14. 3 şi cu 2 fac 8 (altă farsă)

Iată acum o farsă analogă. Aşezați pe masă 3 chibrituri şi rugați-l pe prietenul vostru să adauge alte 2, aşa fel încât să rezulte 8. Bineînțeles, chibriturile nu pot fi rupte.

15. Trei pătrate

Din 8 beţişoare (de pildă, chibrituri), dintre care 4 sunt de două ori mai mari decât celelalte 4, se cere să alcătuiți 3 pătrate egale.

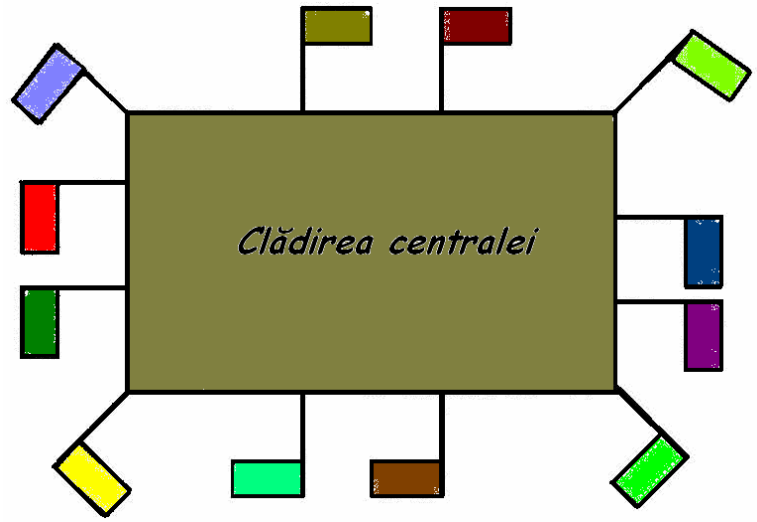
16. Încercați!

Aşezați 10 scaune de-a lungul pereților unei camere pătrate, în aşa fel încât în dreptul fiecărui perete să se afle un număr egal de scaune.

17. Aşezarea steguleţelor

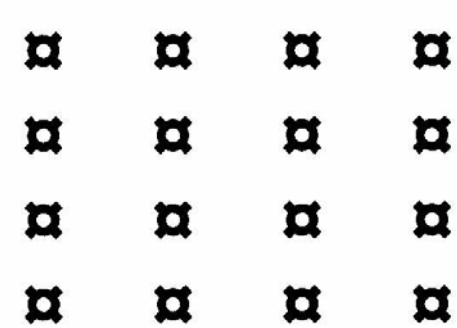
Energeticienii au construit o mică hidrocentrală. În ziua inaugurării ei, elevii au împodobit clădirea centralei, din cele patru părți, cu ghirlande de flori, lampioane şi steguleţe. Steguleţe erau cam puţine, în total 12. La început elevii au aşezat steguleţele câte 4 de fiecare latură a clădirii, aşa cum se vede în desenul următor. Apoi şi-au dat seama că cele 12 steguleţe pot fi aşezate câte 5, sau chiar câte 6 de fiecare latură.

Cel de-al doilea proiect le-a plăcut mai mult şi au hotărât să aşeze steguleţele câte 5. Arătaţi pe schemă cum au aşezat elevii cele 12 steguleţe câte 5 de fiecare latură a clădirii şi cum ar fi putut să le aşeze câte 6.



18. Mereu cu soţ

Luaţi 16 obiecte oarecare (hârtiuţe, monede sau piese de table) şi aşezaţi-le câte 4 în rând, aşa cum se arată în figura de mai jos. Apoi eliminaţi 6 din ele, dar aşa fel ca în fiecare rând, vertical şi orizontal, să rămână un număr cu soţ de obiecte. Se pot obţine soluţii diferite, în funcţie de locul ocupat de obiectele eliminate.

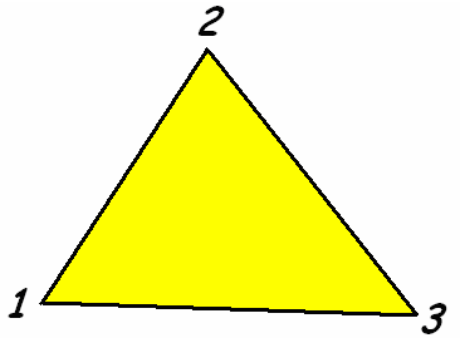


19. Triunghiul „magic"

În vârfurile triunghiului am scris numerele 1, 2 şi 3. Voi trebuie să aşezaţi pe laturile triunghiului numerele 4, 5, 6, 7, 8, 9 în aşa fel, încât suma tuturor numerelor dispuse de-a lungul fiecărei laturi să fie egală cu 17. Problema nu este grea, deoarece v-am indicat numerele care trebuie aşezate în vârfurile triunghiului.

Va trebui să pierdeţi mai multă vreme dacă nu vă voi spune dinainte ce numere trebuie scrise în vârfurile triunghiului şi vă voi cere să aşezaţi în aşa fel numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, folosind fiecare număr numai o singură dată, încât suma numerelor de-a lungul fiecărei laturi a triunghiului, împreună cu cele din vârf, să fie egală cu 20.

Există mai multe soluţii, şi după ce veţi fi găsit-o pe prima nu vă pierdeţi răbdarea, ci mutaţi cifrele ca să găsiţi cât mai multe soluţii posibile.



20. Cu 4 linii drepte

Desenați pe o foaie de hârtie 9 puncte, aşezate la distanțe egale, astfel încât să formeze un pătrat. Fără să ridicați creionul de pe hârtie, trageți 4 linii drepte în aşa fel încât să treceți prin toate punctele.

21. Despărțiți caprele de verze

Acum trebuie să rezolvați o problemă care, într-un anumit sens, este inversă celei de mai înainte. În problema anterioară a trebuit să unim punctele cu ajutorul unor linii drepte; de astă dată se cere să tragem 3 linii drepte cu ajutorul cărora să separăm caprele de verze.



22. Două trenuri

Un tren rapid a pornit de la Moscova spre Leningrad cu o viteză de 60 de km/h, fără oprire. Un alt tren a plecat în sens contrar, adică de la Leningrad spre Moscova, cu o viteză de 40 de km/h, de asemenea fără oprire.

Care va fi distanța dintre trenuri cu o oră înaintea întâlnirii lor?

23. În timpul fluxului (farsă)

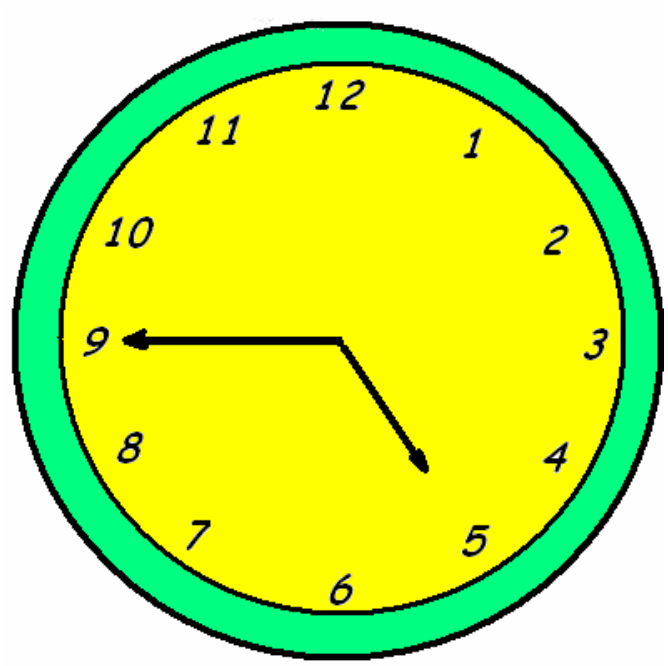
Nu departe de țărm se găseşte ancorată o corabie, peste bordul căreia este aruncată o scară de frânghie. Scara are 10 trepte, iar distanța dintre trepte este de 30 cm. Treapta cea mai de jos atinge suprafața apei. Marea este astăzi liniştită, dar începe fluxul, care face ca în fiecare ceas nivelul apei să crească cu 15 cm.

Peste cât timp va acoperi apa treapta a treia a scării de frânghie?

24. Cadranul ceasului

a) Cu ajutorul a două drepte împărțiți cadranul unui ceas în 3 părți, aşa fel ca adunând numerele din fiecare parte să obțineți aceeaşi sumă.

b) Poate fi oare împărțit cadranul în 6 părți, astfel ca fiecare parte să cuprindă două numere, iar sumele lor să fie egale?

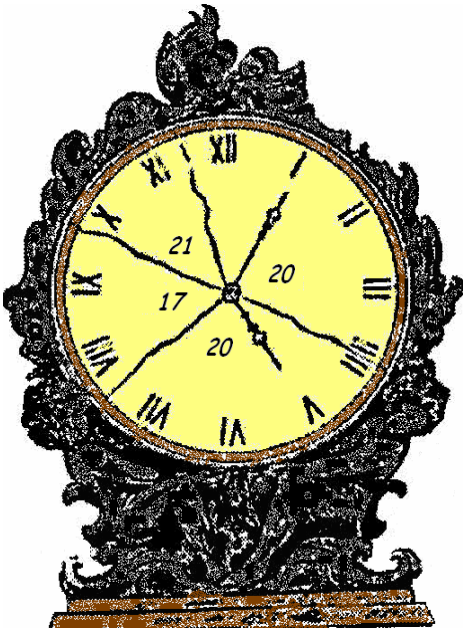


25. Cadranul spart

Am avut prilejul să văd într-un muzeu un ceas vechi, care avea însemnate orele cu cifre romane, iar cifra patru, în loc să fie notată cu semnul pe care-l cunoaştem (IV), era însemnată prin patru bețe (IIII).

Cadranul era străbătut de nişte crăpături care-l împărțeau în 4 părți, aşa cum se vede în figura de mai jos. Suma numerelor din fiecare parte era diferită: în prima - 21, în a doua - 20, în a treia - 20, iar în a patra - 17. Am remarcat că dacă crăpăturile ar fi dispuse altfel, suma numerelor din fiecare din cele patru părți ale cadranului ar fi egală cu 20. În acest caz, crăpăturile nu trebuie să treacă negreşit prin centrul cadranului.

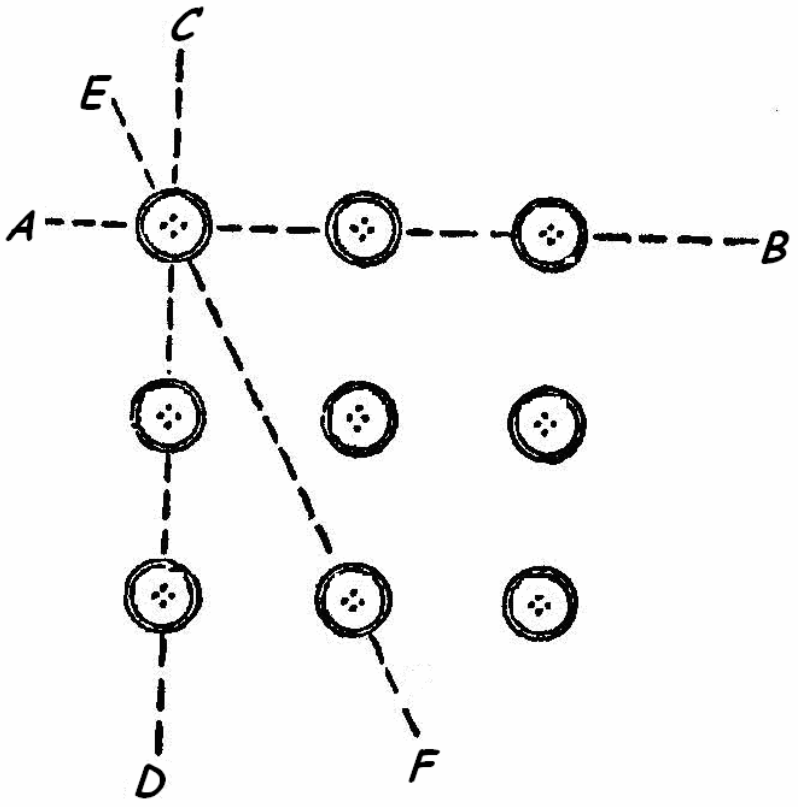
Copiați desenul în caiet şi aflați cum ar trebui să, fie dispuse crăpăturile.



26. Câte trei în rând

Aşezați pe masă 9 nasturi, aşa fel ca să obțineți un pătrat cu latura de 3 nasturi, iar unul asezați-l în centru. Țineți minte că, dacă de-a lungul unei drepte oarecare se găsesc doi sau mai mulți nasturi, vom da întotdeauna acestei aşezări numele de „rând". Astfel AB şi CD sunt rânduri, cuprinzând fiecare câte 3 nasturi, iar EF este un rând cu numai 2 nasturi. Stabiliți câte rânduri cu câte 3 nasturi şi câte rânduri cu câte 2 nasturi se găsesc în desenul nostrum.

Scoateți acum 3 nasturi, iar pe cei 6 rămaşi aşezați-i în trei rânduri, în aşa fel ca în fiecare rând să se găsească câte trei nasturi.



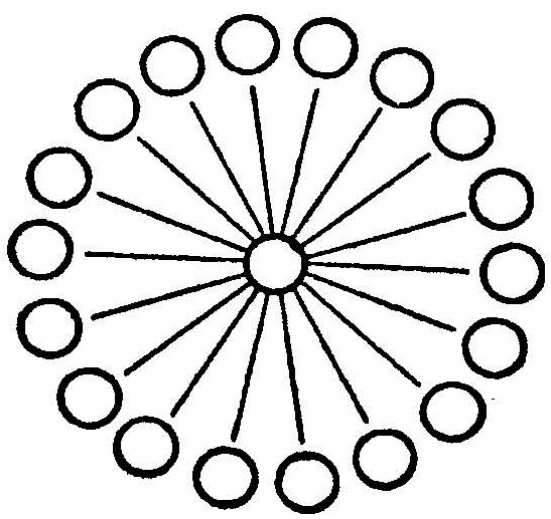
27. Zece rânduri

Nu e greu de aflat cum trebuie aşezate 16 piese de table în 10 rânduri care să cuprindă fiecare câte 4 piese. Mult mai greu este să aşezați 9 piese în 10 rânduri şi fiecare rând să aibă câte 3 piese.

Rezolvați amândouă problemele.

28. De la 1 la 19

Se cere să aşezați în cele 19 cerculețe toate numerele întregi de la 1 la 19, astfel ca suma cifrelor din oricare 3 cerculețe aflate pe aceeaşi dreaptă să fie egală cu 30.



29. Repede, dar cu atenție!

Următoarele 4 probleme trebuie rezolvate „la iuțeală". Cine le rezolvă mai repede câştigă.

Problema 1. La amiază, din Moscova pleacă spre Tuia un autobus cu pasageri. O oră mai târziu din Tuia pleacă spre Moscova un biciclist, care porneşte pe aceeaşi şosea, dar, fireşte, se deplasează mult mai încet decât autobusul. Când pasagerii autobusului se vor întâlni cu bicicliștul, care dintre ei va fi mai departe de Moscova?

Problema 2. Ce costă mai mult: un kilogram de monede de 25 de bani sau o jumătate de kilogram de monede de 50 de bani?

Problema 3. La ora 6 ceasul de perete a bătut de 6 ori. Uitându-mă la ceasul de buzunar am observat că între prima bătaie şi cea de-a şasea s-au scurs exact 30 de secunde. Dacă pentru a bate de 6 ori a fost nevoie de 30 de secunde, cât timp va dura bătaia ceasului la amiază sau la miezul nopții, atunci când pendula bate de 12 ori?

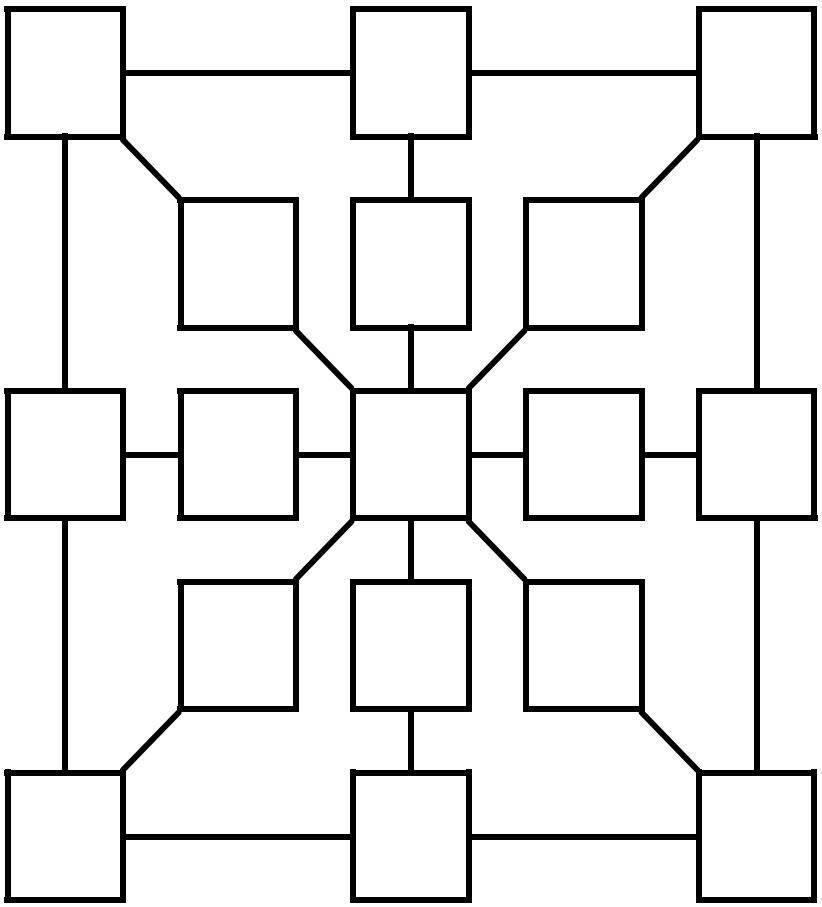
Problema 4. Dintr-un punct şi-au luat zborul 3 rândunele. Când se vor găsi ele în acelaşi plan?

Gândiți-vă bine dacă ați dat răspunsurile corecte. Nu cumva ați căzut în capcanele pe care le cuprind aceste probleme simple?

30. Aşezarea monedelor

Desenați pe o foaie de hârtie schema de mai jos, mărindu-i dimensiunile de 2 - 3 ori, şi pregătiți 17 monede după cum urmează: 5 monede a 20 copeici, 3 monede a 15 copeici, 3 monede a 10 copeici, 6 monede a 5 copeici. Dacă nu aveți monede cu valorile de mai sus, puteți folosi rotocoale de carton, pe care veți trece valoarea copeicilor respective.

Aşezați monedele în pătratele figurii, în aşa fel ca suma lor de-a lungul fiecărei linii drepte marcate în desen să fie egală cu 55.



31. Musca neastâmpărată

Pe şoseaua Moscova - Simferopol doi biciclişti au pornit în acelaşi timp într-o cursă de antrenament, dar din direcții opuse. În clipa când între biciclişti rămăsese o distanță de 300 de kilometri, o muscă a început să urmărească cursa cu mult interes. Luându-şi zborul de pe umărul unuia din biciclişti şi, depăşindu-l, ea s-a îndreptat în întâmpinarea celuilalt. Ajungând la cel de-al doilea biciclist şi convingându-se că totul este în ordine, a făcut deîndată cale-ntoarsă.

Când a ajuns în dreptul primului biciclist a zburat iarăşi spre cel de-al doilea. Şi aşa musca noastră a zburat mereu de la unul la celălalt, până ce bicicliştii s-au întâlnit. Atunci s-a liniştit şi s-a aşezat pe nasul unuia din ei. Musca zbura între biciclişti cu o viteza de 100 km/oră. În timp ce bicicliştii mergeau tot timpul cu o viteză constantă de 50 km/oră.

Câți kilometri a parcurs musca?

32. Nu mai e mult până atunci

Va fi oare în secolul nostru un asemenea an pe care dacă-l vom scrie în cifre şi vom întoarce apoi hârtia cu capul în jos, numărul citit pe hârtia întoarsă va indica acelaşi an?

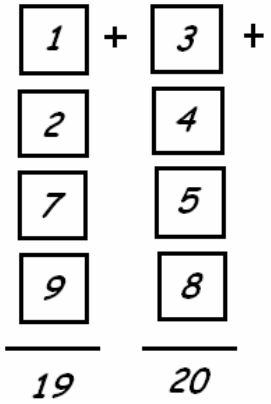
33. Două farse

Prima farsă. Un tată a chemat-o la telefon pe fata lui şi a rugat-o să-i cumpere de la prăvălie câteva lucruri de care avea nevoie, spunându-i în acelaşi timp că banii se găsesc într-un plic pe birou. Fetița a privit în fugă plicul, pe care a văzut scris numărul 98, a scos banii şi, fără să-i numere, i-a băgat în geantă, aruncând plicul. În prăvălie a cumpărat diferite lucruri în sumă de 90 de lei, dar la plată a constatat nu numai că nu-i rămâneau 8 lei, cum ar fi trebuit, dar că îi lipseau chiar 4 lei.

Acasă i-a povestit tatălui întâmplarea, întrebându-l dacă nu cumva a greşit când a numărat banii. Tatăl i-a răspuns că el a numărat banii bine şi că ea este aceea care a greşit, arătându-i totodată în ce a constat greşeala ei.

Ştiți cumva şi voi?

A doua farsă. Pregătiți 8 hârtiuțe cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 şi 9 şi aşezați-le pe două coloane, ca în figura următoare. Mutând numai 2 hârtiuțe, trebuie să obțineți ca totalul celor 2 coloane să fie egal.



34. Câți ani am?

Când tatăl meu avea 31 de ani, eu aveam 8 ani. Astăzi tatăl meu este de 2 ori mai în vârstă ca mine. Câți ani am acum?

35. Apreciați „din ochi"

În fața ochilor voştri se găsesc două coloane de cifre:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Privindu-le veți observa că numerele din prima coloană sunt formate din aceleaşi cifre ca şi cele din coloana a doua, aşezate însă în ordine inversă. Care coloană va da la adunare o sumă mai mare?

Mai întâi comparați coloanele „din ochii", adică fără să faceți adunarea, şi încercați să stabiliți dacă ele sunt egale, sau una trebuie să fie mai mare ca cealaltă. Verificați apoi, făcând adunarea.

36. Adunare rapidă

Cele 8 numere de câte 6 cifre:

328 645 +
491 221
816 304
117 586
671 355
508 779
183 696
882 414

au fost în aşa fel alese, încât grupându-le cu anumită socoteală putem afla totalul adunării „în minte", în cel mult 8 secunde. Puteți rezolva adunarea în acest timp?

Primul truc. Spuneți prietenilor: „Fără să-mi arătați hârtia, scrieți câteva numere cu mai multe cifre, aşezându-le însă în coloană. Apoi îmi veți arăta hârtia, iar eu am să adaug tot atâtea numere câte ați scris voi, comunicându-vă pe loc şi suma lor". Să presupunem că prietenii au scris numerele:

7 621
3 057
2 794
4 518

Veți adăuga astfel de numere care să completeze succesiv - până la 9999 toate numerele scrise. Aceste numere vor fi:

5 481
7 205
6 942
2 378

Într-adevăr,

4518 +	2 794 +	3 057 +	7 621 +
5 481	7 205	6 942	2 378
9 999	9 999	9 999	9 999

Acum nu e greu să ne dăm seama, cum putem calcula rapid totalul adunării:

7 621 +
3 057
2 794
4 518
5 481
7 205

6 942
2 378

Avem de adunat de patru ori numărul 9.999, adică 9.999 x 4, înmulțire care se face foarte uşor în minte: înmulțim 10 000 cu 4 şi scădem 4 unități. Rezultatul obținut va fi: 10.000 x 4 - 4 = 40.000 - 4 = 39.996. Acesta este tot secretul!

Al doilea truc. Scrieți unul sub altul două numere, indiferent de mărimea lor. Eu voi adăuga un al treilea număr şi în aceeaşi clipă voi scrie de la stânga la dreapta suma celor trei numere. Să presupunem că ați scris numerele:

72.603.294
51.273.081

Eu voi adăuga, de exemplu, numărul 48.726.918 şi vă voi indica în acelaşi timp şi rezultatul adunării.

Gândiți-vă singuri ce număr trebuie adăugat pentru a găsi imediat rezultatul adunării.

37. În care mână?

Dați-i prietenului vostru două monede - una cu o valoare cu soț, iar cealaltă cu o valoare fără soț (de exemplu o monedă de 10 bani şi una de 25 de bani). Spuneți-i că, fără să vă arate, să ia una din monede (oricare) în mâna dreaptă, iar pe cealaltă în mâna stângă.

Cu ajutorul matematicii puteți ghici uşor în care mână ține moneda cu soț şi în care mână o are pe cea fără soț. în acest scop îl veți ruga să tripleze valoarea monedei din mâna dreaptă, şi să dubleze valoarea monedei din mâna stângă, iar rezultatele obținute să le adune şi să vă comunice numai totalul. Dacă totalul este o cifră cu soț, atunci în mâna dreaptă se găseşte moneda de 10 bani, iar dacă suma este fără soț, atunci moneda de 10 bani se găseşte în mâna stângă.

Explicați de ce se întâmplă întotdeauna aşa cum am arătat mai sus şi gândiți-vă ce alte trucuri pot fi născocite pe această bază.

38. Câți sunt?

Un băiat are tot atâtea surori, câți frați, dar sora lui are de două ori mai puține surori decât frați.

Câți frați şi câte surori sunt?

39. Cu aceleaşi cifre

Folosind numai semnul adunării, scrieți numărul 28 cu ajutorul a cinci de doi, iar numărul 1.000 cu ajutorul a opt de opt.

40. O sută

Cu ajutorul oricăror operații aritmetice scrieți numărul 100, fie din cinci de unu, fie din cinci de cinci. Atenție! Numărul 100 poate fi scris din cinci de cinci în două feluri.

41. Duel aritmetic

În cercul de matematică de la şcoala noastră era obiceiul ca fiecărui elev doritor să devină membru al cercului să i se dea în prealabil spre rezolvare o problemă simplă, dar care-i punea la încercare iscusința matematică. Dacă o rezolva era primit ca membru, dacă nu o rezolva era admis numai ca auditor. îmi aduc aminte că odată preşedintele nostru i-a dat unui coleg de-al meu următoarea problemă:

„Se dau numerele: 111, 333, 555, 777, 999. Să se înlocuiască 12 din cifrele de mai sus cu 0, aşa ca la adunare să rezulte 20". Colegul meu s-a gândit un pic şi a scris imediat:

011 +		010 +
000		003
000	sau	000
000		007
009		000
20		20

Apoi a zâmbit şi a spus: „Dacă la cele cinci numere de câte 3 cifre se vor înlocui cu 0 numai 9 cifre, se poate obține la adunare totalul de 1.111. Încercați!"

Preşedintele cercului s-a fâstâcit puțin, dar s-a apucat cu mult curaj de rezolvarea problemei şi trebuie să spunem că a rezolvat-o cu succes. El nu numai că a găsit soluția cerută, dar a descoperit şi o altă variantă: „Tot la numerele de mai sus - a spus el - se pot înlocui cu 0 nu 9, ci numai 8 cifre, şi totuşi suma să rămână neschimbată, adică 1.111".

De data aceasta a căzut pe gânduri colegul meu. Membrii cercului urmăreau cu interes acest neaşteptat „duel" aritmetic. Colegul meu a găsit şi de astă dată soluția şi, spre satisfacția celor prezenți, a propus o nouă variantă a problemei: „La cele cinci numere de trei cifre de mai sus se pot înlocui cu 0 nu 9 sau 8, ci numai 6 cifre, şi totuşi suma să rămână aceeaşi, adică 1.111". Profesorul de matematică i-a lăudat pe amândoi participanții la duel şi le-a spus că suma de 1.111 poate fi menținută, înlocuind cu 0 nu 9, 8 sau 6 cifre, ci chiar şi 5 cifre.

Găsiți soluția tuturor celor patru variante ale acestei probleme. Născociți o problemă analoagă pentru numere alcătuite nu din trei, ci din cinci cifre de unu, de trei, de cinci, de şapte şi de nouă.

42. Douăzeci

Din patru numere fără soț este uşor să alcătuim o sumă egală cu zece:

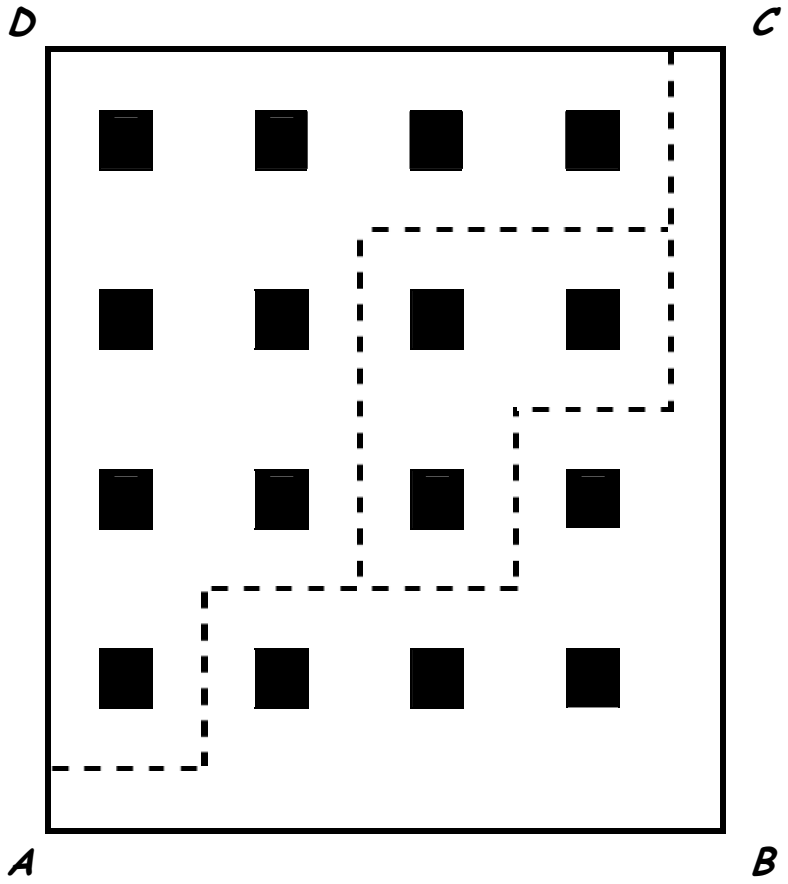
$$1 + 1 + 3 + 5 = 10 \text{ sau } 1 + 1 + 1 + 7 = 10.$$

Există şi a treia soluție: 1 + 3 + 3 + 3 = 10. Alte soluții nu mai există (inversările în ordinea cifrelor, fireşte, nu ne dau soluții noi). Mult mai multe soluții are următoarea problemă: „Să se obțină numărul 20 adunând opt numere impare; şi de această dată se admite repetarea aceluiaşi număr. Găsiți toate soluțiile acestei probleme şi stabiliți câte din sumele respective vor cuprinde cele mai multe numere diferite."

Chiar dacă veți alege numerele la întâmplare, veți găsi mai multe soluții, dar probele lipsite de sistem nu vă vor da certitudinea că ați epuizat toate posibilitățile. Dacă veți introduce în „procedeul probelor" o anumită ordine, un sistem, atunci nu vă va scăpa niciuna din soluțiile posibile.

43. Câte rute sunt posibile?

Am primit următoarea scrisoare din partea unor elevi: În cadrul şedinţelor cercului de matematică am trasat planul a şaisprezece cvartale din oraşul nostru. În schema anexată toate cvartalele au fost convenţional inseminate prin pătrate egale. Pe noi ne-a interesat următoarea problemă: „Câte rute diferite există din punctul **A** până la punctul **C**, dacă ne deplasăm pe străzile oraşului numai înainte şi la dreapta, la dreapta şi înainte? Unele rute pot coincide parțial (vezi linile punctate din schemă)."



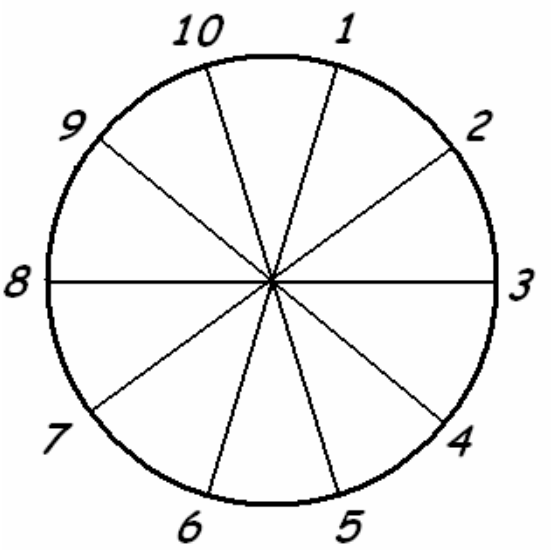
Credeți că am soluționat corect problema dacă am găsit 70 de rute diferite? Ce trebuie răspuns la această scrisoare?

44. Nouăzeci şi nouă şi o sută

Câte semne de „plus" (+) trebuie puse între cifrele numărului 987.654.321, pentru ca suma rezultată să fie 99? Sunt posibile două soluții. Ele nu sunt chiar atât de uşor de găsit, dar în schimb veți căpăta o experiență care vă va ajuta să puneți repede semnul „plus" între următoarele şapte cifre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, în aşa fel ca suma rezultată să fie 100 (nu se admite schimbarea ordinii cifrelor). Şi în acest caz sunt posibile două soluții.

45. Schimbați ordinea cifrelor

La capetele a cinci diametre au fost scrise toate numerele întregi de la 1 până la 10, aşa cum se vede în figura următoare. În această situație numai într-un singur caz suma a două numere învecinate este egală cu suma numerelor învecinate opuse, şi anume: 10 + 1 = 5 + 6, însă, de exemplu, 1 + 2 ≠ 6 + 7 sau 2 + 3 ≠ 7 + 8.



Aşezați numerele de mai sus astfel ca suma oricăror două numere învecinate să fie egală cu suma celor două numere opuse corespunzătoare. Vă pot spune că problema are mai multe soluții, adică există mai multe posibilități de a aşeza numerele aşa fel ca să îndeplinească condițiile problemei. Încercați să găsiți un sistem care să vă permită să stabiliți numărul tuturor soluțiilor posibile.

46. Operațiile diferă, rezultatul este acelaşi

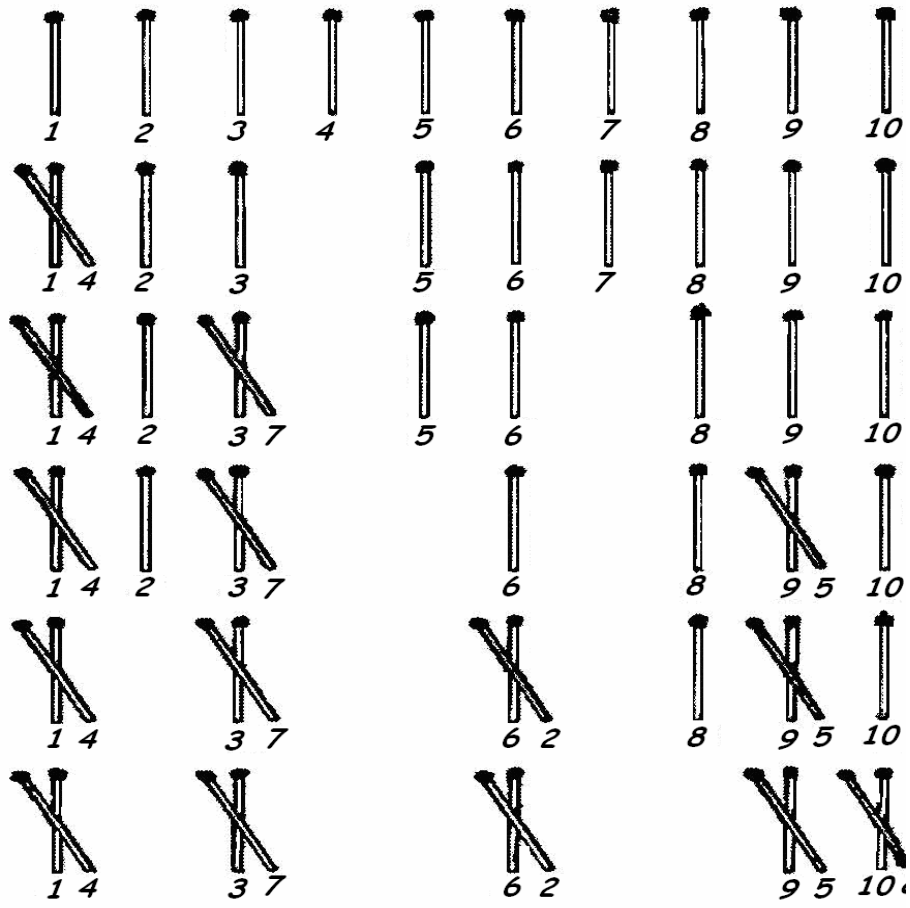
Dacă vom înlocui semnul adunării între doi de 2 cu semnul înmulțirii, rezultatul rămâne neschimbat. într-adevăr: 2 + 2 = 2 x 2. Nu e greu de găsit şi 3 numere care să aibă această proprietate, de exemplu: 1 + 2 + 3 = 1 x 2 x 3. Există şi patru numere monodrome (monodrom = numărul reprezentat printr-o singură cifră), care înmulțite sau adunate între ele să ne dea unul şi acelaşi rezultat.

Cine a găsit mai repede numerele respective? Gata?

Continuați întrecerea! Găsiți 5, apoi 6, 7 etc. numere monodrome care să aibă această proprietate. Țineți seama că, începând cu grupele de cinci numere, soluțiile pot fi diverse.

47. Câte două

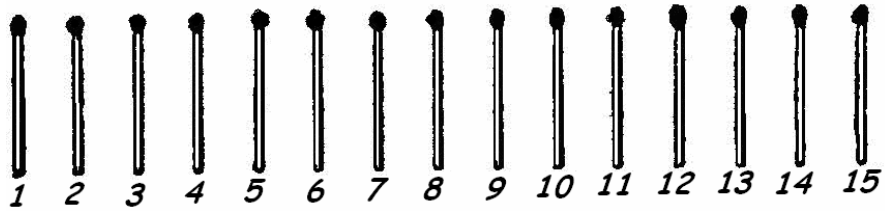
Înşirați pe masă într-un singur rând zece chibrituri. Eu le pot aşeza în grupuri de două chibrituri, adică pot obține 5 perechi, sărind de fiecare dată cu un chibrit peste alte două chibrituri. Găsiți un alt sistem de grupare a chibriturilor câte două, respectând aceleaşi condiții.



48. Câte trei

Aşezaţi în rând cincisprezece chibrituri. Se cere să le grupaţi în cinci grupe de câte 3 chibrituri fiecare. Se admite mutarea unui singur chibrit la o mişcare, sărind de fiecare dată peste trei chibrituri.

Rezolvaţi-o în zece mutări.



49. Patru operaţii aritmetice

Se dau următoarele 7 rânduri de numere aşezate în ordine crescândă:

123 = 1

1234 = 1

12345 = 1

123456 = 1

1234567 = 1

12345678 = 1

123456789 = 1

Fără să schimbaţi ordinea cifrelor, puneţi între ele semne aritmetice, astfel încât în urma operaţiilor respective în fiecare rând să rezulte totalul indicat.

Operațiile trebuie efectuate în ordine succesivă, de la stânga la dreapta. Se poate întâmpla să aveți de făcut o adunare, după care să urmeze o înmulțire; în acest caz, după cum ştiți, trebuie să folosiți parantezele mici şi mari. La nevoie, puteți considera două cifre alăturate drept un singur număr...

50. Şoferul curios

Aruncându-şi privirea asupra kilometrajului maşinii, un şofer a observat că el indică numărul 15.951. Cu această ocazie şoferul a constatat că numărul kilometrilor parcurşi de automobil era exprimat printr-un număr simetric, adică un număr care putea fi citit la fel şi de la stânga şi de la dreapta: 15.951.

- Curios număr!... îşi zise şoferul. Acum, probabil va mai trece multă vreme până voi putea citi pe kilometraj un alt număr cu aceleaşi însuşiri. Totuşi, exact peste 2 ore, kilometrajul indică din nou un număr simetric.

Aflați cu ce viteză a mers şoferul în aceste 2 ore.

51. Predarea cerealelor la termen

Începând predarea cerealelor vândute statului, conducerea unei gospodării a hotărât ca prima coloană de camioane încărcate cu cereale să ajungă în oraş exact la ora 11. Dacă maşinile vor merge cu o viteză de 30 km/oră, coloana va sosi în oraş la ora 10, iar dacă vor merge cu o viteză de 20 km/oră, va ajunge la ora 12. La ce distanță de oraş se găseşte gospodăria colectivă şi cu ce viteză trebuie să meargă camioanele pentru a sosi la ora fixată?

52. Într-un autobus

Două colege de şcoală călătoreau spre casă în acelaşi autobus.

- Observ - spuse una din prietene - că autobusele ce merg în sens contrar trec din cinci în cinci minute. Ce crezi tu, câte autobuse sosesc în centru în decurs de o oră, dacă viteza lor în ambele sensuri este egală?

- Fireşte, 12, deoarece 60 : 5 = 12, - răspunse prietena.

Eleva care pusese întrebarea nu a fost de acord cu soluția dată de prietena ei. Care este părerea voastră?

53. De la 1 până la 1.000.000.000

Se spune că pe când avea nouă ani, Gauss (1777-1855) a fost pus de profesorul său de matematică să afle suma tuturor numerelor întregi de la 1 la 100, adică 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 şi micul elev a găsit imediat o soluție ingenioasă care i-a îngăduit să afle foarte repede suma căutată. Trebuia să adune primul număr cu ultimul al doilea cu penultimul ş.a.m.d. Suma fiecărei perechi de acest este egală cu 101 şi se repetă de 50 de ori. Prin urmare, suma tuturor numerelor întregi de la până la 100 este egală cu 101 x 50 = 5.050. Folosiți acelaşi procedeu pentru rezolvarea unei probleme mai dificile: găsiți suma tuturor cifrelor ale tuturor numerelor întregi de la 1 până la 1.000.000.000.

Pentru rezolvarea problemelor următoare este necesară cunoaşterea operaţiilor aritmetice cu fracţii simple şi zecimale

54. Ceasul

Călătorind prin Rusia am ajuns în ţinuturi unde diferenţa dintre temperatura aerului în timpul zilei şi cea din timpul nopţii este atât de mare, încât în zilele şi nopţile care le petreceam în aer liber am observat că ceasul meu nu mai funcţiona cum trebuie. Astfel, din cauza schimbărilor de temperatură, ziua ceasul fugea cu 1/2 de minut, noaptea rămânea în urmă cu 1/3 de minut. În dimineaţa zilei de 1 mai, ceasul meu arăta încă ora exactă. La ce dată el va fugi cu 5 minute?

55. Scara

Blocul de care este vorba are şase etaje. De câte ori este mai lung drumul pe scară până la al şaselea etaj, decât drumul pe aceeaşi scară până la al treilea etaj, dacă între etaje scara are acelaşi număr de trepte?

56. Aţi ghicit?

Ce semn trebuie pus între cifrele 2 şi 3 scrise alăturat, pentru a se obţine un număr mai mare decât 2, dar mai mic decât 3?

57. Fracţii interesante

Dacă la numitorul şi la numărătorul fracţiei 1/3 se va aduna numitorul ei, fracţia se va mări de două ori. Găsiţi o fracţie căreia dacă i se adună numitorul la numărător şi numitor va creşte:

a) de 3 ori;

b) de 4 ori.

58. Care este numărul?

Jumătate reprezintă o treime din el. Care este numărul?

59. Drumul elevului

În fiecare dimineaţă Boris are de făcut până la şcoală un drum destul de lung. La o distanţă de 1/4 din drumul până la şcoală se găseşte o clădire care are la poartă un ceas electric, iar la o distanţă de 1/3 din drumul de acasă până la şcoală se găseşte gara. Atunci când trecea prin dreptul clădirii, ceasul arăta de obicei ora 7 şi 30 de minute, iar când ajungea în dreptul gării ceasul din faţa intrării arăta ora 8 fără 25 de minute.

La ce oră pleca Boris de acasă şi la ce ora ajungea la şcoală?

60. Pe stadion

De-a lungul pistei de alergări sunt aşezate, la distanţe egale, 12 fanioane. Linia de start se află în drepul primului fanion. Alergătorul a ajuns în dreptul fanionului al optulea la 8 secunde după începerea cursei.

Ştiind că el aleargă cu o viteză constantă, în câte secunde va ajunge atletul în dreptul fanionului al 12-lea?

61. Mai devreme sau mai târziu?

Andrei se întorcea acasă de la Kiev. Prima jumătate a drumului a mers cu trenul şi a parcurs-o de 15 ori mai repede decât dacă ar fi mers pe jos. Cea de-a doua jumătate a drumului a trebuit să o facă cu căruța cu boi şi a mers de două ori mai încet decât pe jos.

Ce credeți, dacă mergea pe jos ajungea acasă mai devreme sau mai târziu?

62. Ceasul deşteptător

Ceasul meu deşteptător rămâne în urmă cu 4 minute la fiecare oră; acum 3 ore l-am pus exact după radio. Ceasul de mână, care merge fără greşeală, arăta în acest moment ora 12.

Peste câte minute, deşteptătorul va indica şi el tot ora 12?

63. Calupul de săpun

Pe unul di3n talerele cântarului a fost aşezat un calup de săpun, iar pe celălalt taler 3/4 dintr-un calup identic cu primul şi încă 3/4 kg. Cântarul se găseşte în echilibru perfect.

Cât cântăreşte calupul?

64. Mici probleme distractive

Problema 1. Scrieți cu ajutorul a două cifre cel mai mic număr pozitiv.

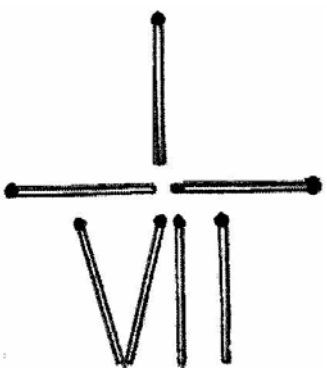
Problema 2. Numărul 37 a fost scris cu ajutorul a cinci cifre de 3 în felul următor: $37 = 33 + 3 + \frac{3}{3}$. Găsiți un alt mijloc pentru a exprima numărul 37 cu ajutorul a cinci cifre de 3.

Problema 3. Scrieți numărul 100 cu ajutorul a şase cifre de acelaşi fel.

Problema 4. Scrieți 55 folosind numai cinci de 4.

Problema 5. Scrieți numărul 20 cu ajutorul a patru de 9.

Problema 6. Din şapte chibrituri a fost scris numărul $\frac{1}{7}$. Transformați această fracție în $\frac{1}{3}$, folosind acelaşi număr de chibrituri.



Problema 7. Scrieți 20 folosind numai cifrele 1, 3, 5 şi 7, fiecare din ele de câte trei ori.

Problema 8. Suma a două numere formate din cifrele 1, 3, 5, 7 şi 9 este egală cu suma a două numere formate din cifrele 2, 4, 6 şi 8. Găsiți aceste numere folosind fiecare cifră numai o singură dată.

Observație! **Nu se admite folosirea de fracții suprunitare.**

Problema 9. Care două numere înmulțite sau scăzute ne dau unul şi acelaşi rezultat? Perechi de numere de acest fel sunt infinit de multe. Cum se formează asemenea perechi?

Problema 10. Alcătuiți din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 două fracții egale, a căror sumă să fie egală cu 1. Trebuie să folosiți toate cifrele şi numai o singură dată (există mai multe soluții).

Problema 11. Folosind o singură dată fiecare din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 alcătuiți fracții mixte a căror sumă să fie egală cu 100 (sunt posibile mai multe soluții).

65. Viteza medie

Jumătate din drum calul a tras căruța goală şi a mers cu o viteză de 12 km pe oră. Restul drumului l-a făcut cu căruța încărcată, mergând cu o viteză de 4 km pe oră.

Care este viteza medie, adică cu ce viteză constantă ar fi trebuit să meargă calul pentru ca să fi străbătut drumul în acelaşi timp?

66. Călătorul adormit

Când trenul străbătuse jumătate din distanța până la gara unde trebuia să coboare călătorul nostru, acesta s-a culcat şi a dormit până a mai rămas de parcurs jumătate din distanța parcursă în timpul cât a dormit.

Ce parte din distanța totală a străbătut-o dormind?

67. Care este lungimea trenului?

Două trenuri vin din direcții opuse, pe linii paralele; unul merge cu o viteză de 36 km/oră, celălalt cu o viteză de 45 km/oră. Pasagerul din trenul al doilea a observat că primul tren a trecut prin fața lui timp 6 secunde.

Care este lungimea primului tren?

68. Biciclistul

Când biciclistul a străbătut 2/3 din drum i-a explodat camera. Restul drumului l-a făcut pe jos şi, pentru a ajunge la destinație, i-a trebuit de două ori mai mult timp decât cel cheltuit pentru acoperirea distanței parcurse cu bicicleta.

De câte ori mergea mai repede cu bicicleta decât pe jos?

69. Întrecerea

Strungarii Vasile şi Grigore, elevi la şcoala medie tehnică de metalurgie, au primit din partea meşterului sarcina să confecționeze un număr egal de piese. Ei au

vrut să execute piesele în acelaşi timp şi înainte de termen. Peste câtva timp au constatat însă că Grigore realizase numai jumătate din câte îi mai rămăseseră de făcut lui Vasile, iar acesta din urmă mai avea de confecționat jumătate din câte făcuse.

De câte ori trebuia acum să sporească Grigore norma zilnică, în comparație cu Vasile, pentru ca să termine comanda în acelaşi timp cu acesta?

70. Cine are dreptate?

Maria avea de rezolvat o problemă de aritmetică. Ultima operație consta în determinarea volumului unor săpături de pământ. Pentru aceasta trebuia să calculeze produsul a 3 numere. Măria înmulțise primele 2 numere şi se pregătea să înmulțească rezultatul obținut cu al treilea număr, când a observat că scrisese greşit al doilea factor: el era mai mare cu 1/3 decât numărul dat în enunțul problemei. Pentru a nu reface înmulțirea făcută, Măria a decis că în orice caz va obține rezultatul corect dacă va micşora cu o treime pe cel de-al treilea factor, cu atât mai mult cu cât el era egal cu factorul al doilea.

- Nu ai făcut bine, i-a spus prietena ei. Procedând astfel, ai greşit cu 20 de metri cubi.

- Cum se poate? îi răspunse Măria. Din moment ce am mărit unul din numere, iar pe celălalt, egal cu im micşorat exact cu cât era mai mare primul, cred că produsul a rămas neschimbat. Cine are dreptate? Sunteți în stare, folosindu-vă de datele de mai sus, să aflați volumul săpăturilor?

71. Trei chifteluțe gustoase pentru cină

Mama găteşte chifteluțe foarte gustoase, folosindu-se de o tigaie mică. După ce prăjeşte chiftelele pe una din părți, ea o întoarce pe cealaltă parte. Prăjitul fiecărei părți a chifteluței durează 30 de secunde, în tigaie nu încap decât 2 chifteluțe deodată. Dacă veți afla în ce chip izbuteşte mama, în condițiile de mai sus, să prăjească cele 3 chifteluțe pe ambele părți numai într-un minut, în loc de 2, veți căpăta încă 3 chifteluțe gustoase.

Situații dificile

72. Iscusința fierarului Hecio

Într-o zi ne-am apropiat de un vechi turn singuratic. L-am cercetat şi ne-am aşezat să ne odihnim. Printre noi era şi un student la facultatea de matematică. Ca să ne distreze, el a născocit următoarea problemă:

„Cu trei sute de ani în urmă trăia pe aici un prinț rău şi înfumurat. Prințul avea o fată de măritat, pe nume Daridjan, pe care o făgăduise de soție unui vecin bogat. Fata îndrăgise însă un flăcău de rând - pe fierarul Hecio. Daridjan şi Hecio au încercat să fugă în munți, dar slugile prințului i-au prins. înfuriat, prințul îi condamnă la moarte şi hotărî să-i execute chiar a doua zi pe amândoi, poruncind să fie închişi peste noapte în acest turn înalt, neterminat şi părăsit.

Împreună cu ei a fost închisă şi slujnica lui Daridjan, o biată fata care îi ajutase să fugă. Hecio nu şi-a pierdut cumpătul şi s-a apucat să cerceteze cu de-amănuntul turnul, ca să vadă dacă nu exista vreo posibilitate de salvare. Ajuns în vârful turnului, unde se găsea o fereastră, şi-a dat seama că e cu neputință să sară, căci şi-ar fi zdrobit oasele de la înălțimea aceea.

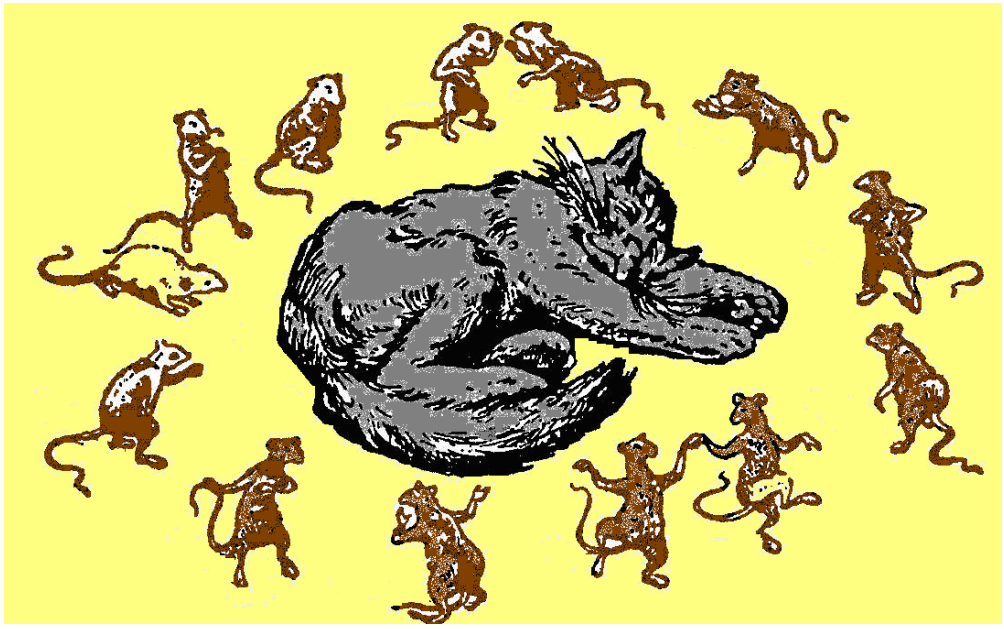
Dar ceva mai sus de fereastră Hecio a observat, fixat în zid, un scripete ruginit, peste care era aruncată o funie, uitată pesemne de meşterii zidari. La fiecare capăt al funiei era legat un coş gol. Hecio îşi aminti cum cu ajutorul acestor coşuri zidarii ridicau cărămizile şi coborau piatra spartă. Dacă greutatea încărcăturii dintr-un coş întrecea greutatea încărcăturii din celălalt cu aproximativ 5-6 kg, coşul cobora destul de lin pe pământ; în acelaşi timp celălalt coş se ridica până la fereastră.

Hecio a apreciat din ochi că Daridjan cântărea cam 50 kg, iar slujnica cel mult 40 kg. Hecio îşi cunoştea greutatea - aproape 90 kg. în afară de aceasta, el a găsit în turn un lanț în greutate de 30 kg. Cum în fiecare coş puteau să încapă doi oameni, sau un om şi lanțul, ei au reuşit să coboare (toți trei) pe pământ. Trebuie să vă spun că ei au coborât în aşa fel, încât niciodată greutatea coşului care cobora cu un om nu întrecea cu mat mult de 10 kg greutatea coşului ce se ridica."

Cum au reuşit ei să evadeze din turn?

73. Motanul şi şoarecii

Motanul Pufuşor o „ajutase" până acum câteva clipe pe tânăra lui stăpână să rezolve probleme de matematică.

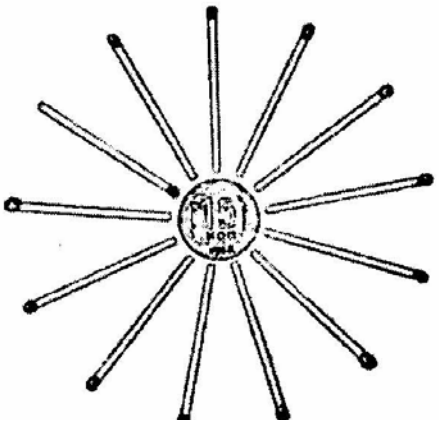


Acum el doarme fericit, iar în vis se vede înconjurat de 13 şoricei. Doisprezece sunt suri, iar unul - alb. Motanul aude cum un glas cunoscut îi şopteşte: „Pufuşor, tu trebuie să mănânci fiecare al treisprezecelea şoarece, numărând roată mereu în aceeaşi direcție şi calculând astfel încât pe şoricelul alb să-l mănânci ultimul."

Cu care dintre şoarece să înceapă?

74. Chibrituri în jurul unei monede

Să-l înlocuim pe motan cu o monedă, iar pe şoricei cu chibrituri. Se cere să se ridice toate chibriturile, în afara aceluia aşezat cu măciulia spre monedă



respectând următoarea condiție: inițial se ridică un chibrit oarecare, apoi se ridică fiecare al treisprezecelea chibrit, deplasându-ne în cerc spre dreapta.

Gândiți-vă care chibrit trebuie ridicat primul.

75. Sorții au căzut pe scatiu şi pe pitulice

Apropiindu-se sfârşitul taberei de vară, pionierii au hotărât să redea libertatea păsărilor pe care le-au prins în timpul vacanței. în total ei aveau 20 de păsărele, închise fiecare într-o colivie separată. Conducătorul pionierilor a îngăduit ca două păsărele să fie luate în oraş, dar a propus următorul procedeu:

- Toate coliviile să fie aşezate într-un singur rând şi, începând de la stânga spre dreapta, să se deschidă fiecare a cincea colivie. Când se ajunge la capătul rândului, numârâtoarea nu se întrerupe, ci merge în continuare de la începutul rândului, bineînțeles fără a mai socoti coliviile deschise, şi aşa mereu până vor fi deschise toate coliviile, în afară de două, care pot fi luate, în oraş.

Propunerea a fost acceptată. Majorității copiilor le era indiferent care păsărele vor fi luate cu ei (din moment ce nu pot fi luate toate). Tania şi Alex însă voiau ca sorții să cadă neapărat pe scatiu şi pe pitulice. în timp ce ajutau la aşezarea coliviilor, ei şi-au reamintit problema cu motanul şi şoarecii.

Au calculat la iuțeală locurile unde trebuiau să aşeze coliviile în care se atfau scatiul şi pitulicea, pentru ca tocmai ele să rămână nedeschise, şi, deoarece n-au greşit, au pus cele două colivii pe locurile.....

76. Cale liberă pentru trenul de pasageri

Într-o haltă cu o singură linie de cale ferată s-a oprit un tren compus dintr-o locomotivă şi cinci vagoane, cu care venise o echipă de muncitori care lucrau la construirea unei linii secundare.

Deocamdată halta nu dispunea decât de o scurtă linie moartă pe care încăpea, în caz de nevoie, o locomotivă şi două vagoane, sau trei vagoane. în urma garniturii care adusese echipa de constructori venea un tren de pasageri.

Cum trebuia procedat pentru a lăsa cale liberă trenului de pasageri?

77. O problemă care a luat naştere din capriciul a trei fetiţe

Trei fetiţe se plimbau împreună cu taţii lor. Toţi şase s-au apropiat de un mic râu şi voiau să treacă de pe un mal pe celălalt. Ei aveau la dispoziţie o singură barcă, fără barcagiu, care putea transporta numai doi oameni.

Traversarea putea fi săvârşită fără dificultate dacă fetiţele n-ar fi declarat, fie din capriciu, fie din ştrengărie, că niciuna nu vrea să rămână pe mal cu unul sau doi taţi străini, fără tatăl ei, şi nici să meargă în barcă cu alt tată. Fetele erau mici, totuşi fiecare din ele putea să conducă singură barca.

Cum au procedat ei?

78. Problema se complică

Acest grup vesel a trecut cu bine pe celălalt mal al râului şi s-a oprit să se odihnească. Fetiţele au pus taţilor lor următoarea întrebare: „Este cu putinţă ca în aceleaşi condiţii, să treacă râul patru perechi?"

Curând se lămuri că, respectându-se condiţiile puse de către fetiţe, trecerea a patru perechi putea fi realizată doar cu o barcă ce putea transporta trei oameni şi că pentru aceasta ar fi fost necesare numai cinci drumuri. Ştiţi cum au judecat ei?

Dezvoltând şi mai departe tema acestei probleme, călătorii noştri au ajuns la concluzia că şi cu o barcă în care încap numai doi oameni se poate efectua trecerea de pe un mal pe celălalt a patru fetiţe cu taţii lor, cu condiţia ca în mijiocul râului să existe o insulă pe care să se poată face o oprire intermediară şi unde să se poată debarca. În acest caz, pentru trecerea definitivă sunt necesare 12 drumuri, bineînţeles respectându-se aceeaşi condiţie, adică niciuna din fetiţe să nu meargă în barcă şi să nu rămână pe insulă sau pe mal cu un tată străin, fără să fie şi tatăl ei.

Găsiţi şi această soluţie.

79. Alb şi negru

Luaţi 4 piese de table albe şi 4 piese negre şi aşezaţi-le pe masă, alternând culoarea: albă, neagră, albă, neagră etc. în stânga sau în dreapta lăsaţi un loc liber, atât cât să încapă 2 piese. în spaţiul liber puteţi muta de fiecare data numai câte 2 piese alăturate şi fără să inversaţi poziţia lor. Este suficient să faceţi patru mutări de perechi de piese, pentru ca să adunaţi în rând piesele negre urmate de cele albe.

Convingeţi-vă că am dreptate.

80. Complicarea problemei

Majorând numărul pieselor folosite iniţial, problema se complică. Astfel, dacă veţi aşeza în rând 5 piese albe şi 5 piese negre, alternând culoarea, va fi nevoie de 5 mutări pentru a izbuti să le grupaţi după culoare, adică negrele cu negre, iar albele cu albe. Dacă veţi lua şase perechi de piese vor fi necesare 6 mutări, iar pentru şapte perechi - 7 mutări ş.a.m.d. Găsiţi soluţia problemei pentru 5, 6 şi 7 perechi de piese. Ţineţi minte că la aşezarea iniţială a pieselor trebuie să se lase în stânga (sau în dreapta) un loc liber, în care să nu încapă mai mult de 2 piese, şi că de fiecare dată trebuie să mutăm câte 2 piese alăturate, fără să intervertiţi ordinea în care se succed.

81. Aşezarea cartonaşelor în ordinea numerelor

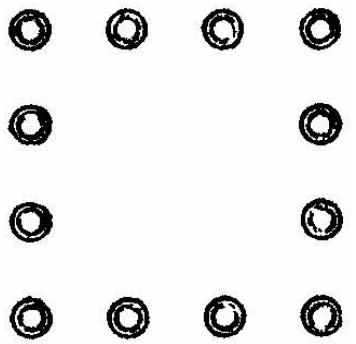
Tăiați din carton 10 cartonaşe cu dimensiunea de 4 x 6 cm şi numerotați-le de la 1 la 10. Apoi aşezați cartonaşele unul peste altul şi luați teancul în mână. Acum, începând cu cartonaşul de sus, puneți primul cartonaş pe masă, al doilea sub teanc, al treilea pe masă, al patrulea sub teanc etc. Procedați în felul acesta până când veți aşeza pe masă toate cartonaşele. Se poate afirma cu certitudine că ele nu vor fi aşezate în ordine numerică crescătoare.

Se cere să se afle în ce ordine trebuie grupate inițial cartonaşele în teanc pentru ca, respectând condiția arătată, să fie aşezate pe masă în ordine numerică de la 1 la 10.

82. Două şarade

I. Nu este greu să aşezați pe masă 12 piese de table (monede, bucățele de hârtie etc.) ca să rezulte un pătrat cu latura de 4 piese. Încercați însă să aşezați piesele astfel încât de-a lungul fiecărei laturi să fie câte 5 piese.

II. Aşezați pe masă 12 piese în aşa fel încât să se formeze 3 rânduri orizontale şi 3 rânduri verticale, şi în fiecare rând să fie câte 4 piese.

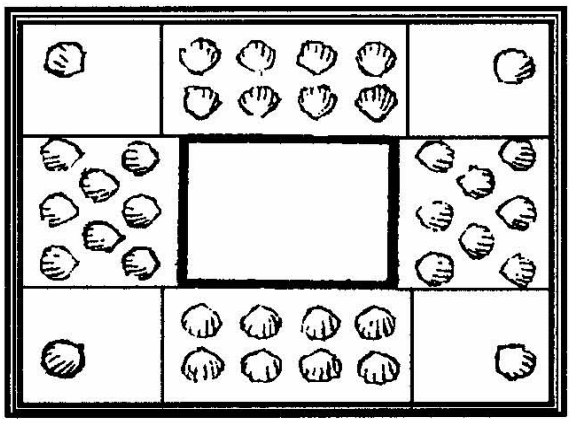


83. Cutia enigmatică

Mihai a fost vara aceasta la mare şi i-a adus de acolo un dar surioarei sale mai mici - Ina: o frumoasă cutiuță împodobită cu 36 de scoici. Pe capacul cutiei erau săpate câteva linii care împart capacul în 8 secțiuni. Ina nu merge încă la şcoală, dar ştie să socotească până la 10. Cadoul lui Mihai îi place mult prin faptul că de-a lungul fiecărei laturi a capacului sunt aşezate exact câte 10 scoici. Când numără scoicile aflate de-a lungul unei laturi, Ina le socoteşte pe toate câte se găsesc în secțiunile care formează latura respectivă.

Scoicile aflate în secțiunile de la colțuri intră în socoteala atât a laturii verticale, cât şi a celei orizontale. Într-o zi, ştergând cutia cu o cârpă, din nebăgare de seamă, mama a spart 4 scoici. Acum la numărătoare nu mai rezultau 10 scoici de-a lungul fiecărei laturi a capacului. Când o să se întoarcă de la grădiniță, Ina o să se necăjească.

- Lasă mamă, - spuse Mihai, le aranjez eu în aşa fel, încât Ina nu va observa nimic.



El dezlipi cu atenție o parte din cele 32 de scoici rămase şi le lipi din nou cu atâta iscusință pe capacul cutiei, încât de-a lungul fiecărei laturi se găseau din nou câte 10 scoici. Peste câteva zile altă boroboață! Cutia căzu de pe masă şi s-au spart încă 6 scoici - au rămas doar 26. Dar şi de data aceasta Mihai izbuti să aşeze în aşa fel cele 26 de scoici rămase, că de-a lungul fiecărei laturi Ina să poată număra, ca şi până acum, câte 10 scoici. E drept că, în ultimul caz, scoicile n-au mai putut fi aranjate pe capacul cutiei tot atât de simetric ca până atunci. Ina nu a băgat însă de seamă acest lucru.

Găsiți ambele soluții ale lui Mihai.

84. O garnizoană vitează

O cetate de zăpadă era apărată cu multă vitejie de o garnizoană. Băieții respinseseră 5 asalturi. La începutul jocului, garnizoana era formată din 40 de oameni. Comandantul cetății de zăpadă şi-a dispus inițial forțele după schema arătată mai jos (central se indică obiectivul general al garnizoanei).

1	9	1
9	**40**	9
1	9	1

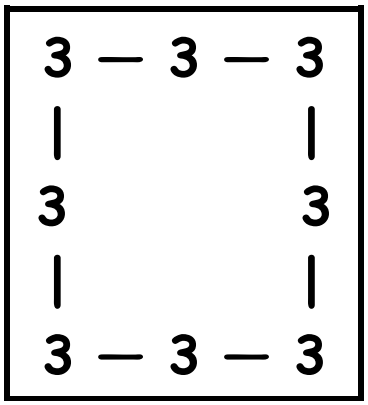
Inamicul a observat că fiecare din cele 4 laturi ale cetății este apărată de 11 oameni. Potrivit condițiilor jocului la primul, al doilea, al treilea şi al patrulea asalt garnizoana pierdea de fiecare dată câte 4 oameni. în urma ultimului asalt, al cincilea, bulgării de zăpadă ai inamicului au scos din luptă încă doi băieți. Cu toate acestea, în pofida pierderilor, după flecare asalt laturile cetății de zăpadă continuau să fie apărate fiecare de 11 oameni.

Cum repartiza comandantul cetății de zăpadă forțele garnizoanei după fiecare asalt?

85. Lămpi luminescente în camera pentru transmisiuni de televiziune

Un tehnician pentru lumina, pregătind camera pentru o transmisiune de televiziune, a încercat diferite metode de iluminare cu ajutorul tuburilor luminescente. Inițial tehnicianul a aşezat câte 3 tuburi în fiecare colț şi câte 3

tuburi pe fiecare din cei 4 pereți ai camerei, în total 24 de tuburi. Apoi, tehnicianul a adăugat 4 tuburi şi încă o dată 4 tuburi. Apoi, a încercat să micşoreze numărul tuburilor până la 20 şi chiar până la 18. De fiecare data el aşeza tuburile în colțuri şi pe pereții camerei astfel, încât de-a lungul fiecărui perete erau câte 9 tuburi.



Găsiți schemele de aşezare pentru 28 şi chiar 32 tuburi; de asemenea pentru 20 şi 18 tuburi. Stabiliți care erau limitele până la care tehnicianul putea să majoreze sau să micşoreze numărul tuburilor, păstrând principiul aşezării lor câte 9 de-a lungul fiecărui perete al camerei.

Ce credeți? Putea oare tehnicianul să adauge sau să scadă nu câte 4 tuburi, ci câte unul, câte două sau câte trei, aşezând totuşi tuburile rămase câte 9 de-a lungul fiecărui perete?

86. Aşezarea iepurilor de experiență

Într-un institut de cercetări ştiințifice a fost confecționată, pentru experiențe şi observații asupra iepurilor de casă, o cuşcă cu două etaje, care avea câte 9 despărțituri la fiecare etaj. Iepurilor le erau destinate 16 despărțituri (8 la etajul superior şi 8 la cel inferior), iar două despărțituri centrale erau rezervate pentru diferite aparate. Potrivit condițiilor de experiență, iepurii trebuiau aşezați în cuşcă astfel, încât:

1) să fie ocupate toate cele 16 despărțituri;

2) în fiecare despărțitură să nu se găsească mai mult de 3 iepuri;

3) în fiecare din cele 4 laturi exterioare ale cuştii să fie exact câte 11 iepuri;

4) la etajul superior să fie introduşi de două ori mai mulți iepuri decât la cel inferior.



Institutul a primit cu 3 iepuri mai puțin decât aştepta. În pofida acestui fapt, toți iepurii au fost aranjați respectându-se toate condițiile de mai sus. Stabiliți câți iepuri credea inițial institutul că o să primească şi cum trebuiau ei să fie aranjați în cuşcă? Apoi, cum au putut aranja iepurii primiți, ştiind că numărul lor era mai mic cu 3 decât cel scontat.

87. Pregătirea pentru sărbătoare

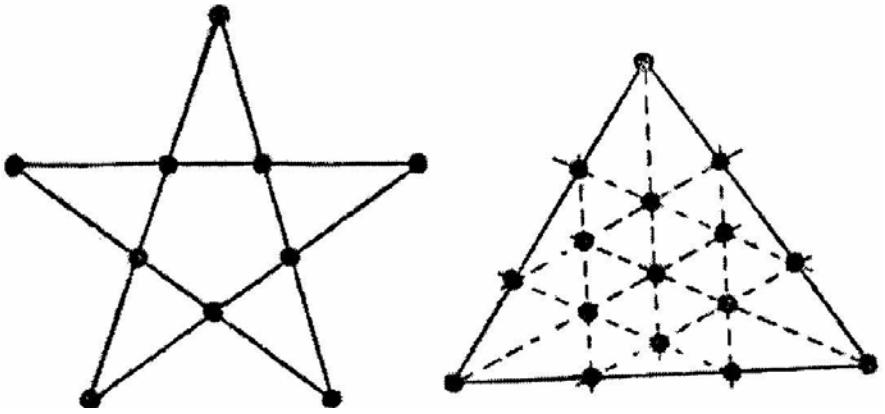
Semnificația geometrică a celor 5 probleme precedente constă în aşezarea unor obiecte de-a lungul a patru linii drepte (laturile unui dreptunghi sau pătrat) în aşa fel ca numărul obiectelor de-a lungul fiecărei drepte să rămână constant, chiar dacă numărul total al obiectelor se schimbă. Aşezarea cerută putea fi realizată, deoarece toate obiectele situate în unghiuri erau considerate ca aparținând ambelor laturi care formau unghiul respectiv, aşa după cum punctul de intersecție a două drepte e situat pe fiecare din ele.

Dacă am presupune că fiecare din obiectele situate pe laturile figurii ocupa un punct oarecare pe latura respectivă, atunci toate obiectele situate în unghiuri trebuie să ni le imaginăm concentrate într-un singur punct (în vârful unghiului).

Să renunțăm acum la posibilitatea unei concentrări, fie chiar imaginare, a obiectelor într-un punct geometric. Să considerăm că fiecare obiect izolat (pietricică, bec, copac), din cele situate pe o suprafață oarecare, ocupă un punct separat pe suprafața dată şi să nu ne mărginim a le aşeza numai de-a lungul a 4 linii drepte.

Dacă vom completa condițiile de mai sus cu cerința unei rezolvări simetrice față de o axă oarecare, atunci problemele vor dobândi un interes geometric suplimentar. Rezolvarea lor duce de obicei la construirea unei figuri geometrice.

Cum s-ar putea, de pildă, ca în cadrul pregătirilor, pentru o iluminație de sărbătoare să se aranjeze frumos 10 becuri în 5 rânduri a câte 4 becuri fiecare?



Vă propunem mai jos câteva probleme similare; străduiți-vă totodată să obțineți o aşezare simetrică.

Problema 1. Cum pot fi aşezate 12 becuri - în 6 rânduri a câte 4 becuri fiecare? (2 soluții)

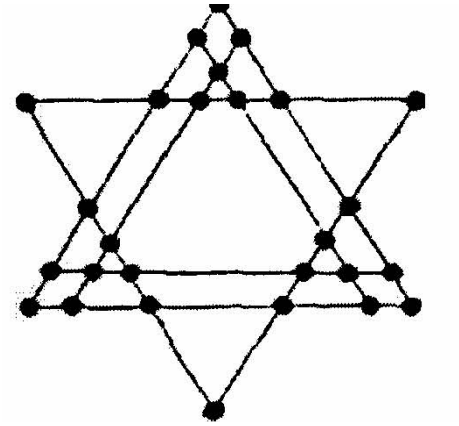
Problema 2. Răsădiți 13 arbuşti decorativi în 12 rânduri, câte 3 arbuşti în fiecare rând.

Problema 3. Pe o suprafață triunghiulară (figura de mai sus) un grădinar a cultivat 16 trandafiri, aşezați în 12 rânduri drepte, a câte 4 trandafiri fiecare. Mai târziu el a pregătit un strat de flori şi a transplantat acolo toți cei 16 trandafiri, aşezându-i în 15 rânduri a câte 4 trandafiri fiecare. Cum a procedat el?

Problema 4. Aşezați 25 de copaci în 12 rânduri, câte 5 copaci în fiecare rând.

88. Răsădiți astfel puieții de stejar

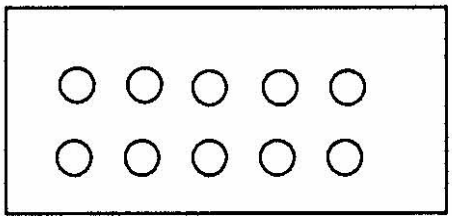
Cei 27 de puieți de stejar din schema de mai jos sunt foarte frumos sădiți, în 9 rânduri a câte 6 stejari în fiecare rând. Fără îndoială însă că un silvicultor ar fi respins asemenea aşezare. Stejarului îi place ca soarele să-l lovească numai de sus, iar pe de margini să fie înconjurat de verdeață. îi place, adică, să crească încotoşmănat, dar cu capul descoperit. în cazul de față 3 stejari s-au îndepărtat de grup, izolându-se!



Încercați să răsădiți aceşti 27 de stejari tot în 9 rânduri şi tot câte 6 stejari în fiecare rând, dar în aşa fel încât toți copacii să fie aşezați în 3 grupuri şi niciunul din ei să nu se depărteze de grupul său. Fireşte că şi de această dată trebuie sădiți simetric.

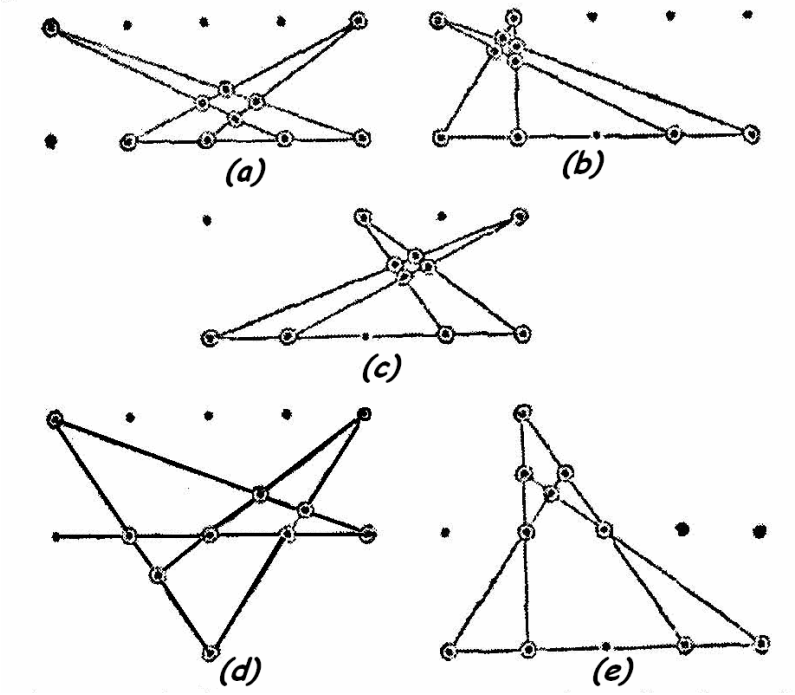
89. Jocuri geometrice

Jocul 1. Aşezaţi pe masă 10 piese de table (monede, nasturi) în două rânduri a câte 5 bucăţi, după cum urmează:



Se cere să se mute 3 piese dintr-un rând şi 1 piesă din celalalt (restul pieselor rămânând nemişcate şi fără să se aşeze o piesă peste alta), aşa fel încât să se formeze 5 rânduri drepte cu câte 4 piese în fiecare rând.

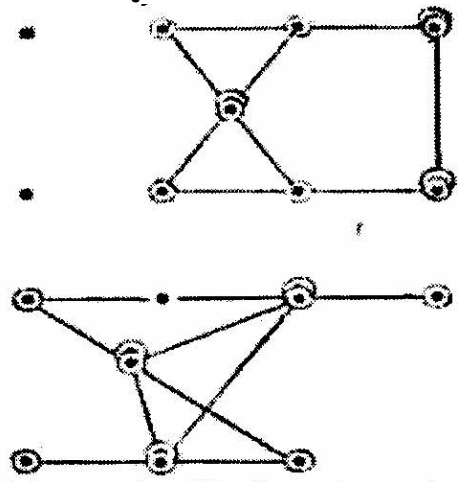
Aici, spre deosebire de problemele precedente, nu se cere o aşezare simetrică a pieselor. Se pot vedea 5 soluţii diferite:



Observaţie! Se consideră soluţie nouă aşezarea care duce la alcătuirea din cele 10 piese a unei configuraţii diferite, de pildă ca în figura de mai sus. Să nu credeţi că cele 5 soluţii epuizează toate rezolvările posibile ale problemei date. Pentru rezolvarea problemei pot fi alese mereu alte piese destinate mutării (schemele a, b, c, e), după cum acelaşi grup de piese poate fi aşezat în chip diferit (schemele a, d). Să admitem că aţi ales pentru mutare 3 piese din rândul de sus şi 1 din cel de jos. Din cinci piese câte 3 sunt posibile 10 combinaţii diferite. Convingeţi-vă! Iar adăugarea la oricare din aceste combinaţii a încă unei piese din rândul de jos dă de fiecare dată 5 grupuri de 4 piese destinate mutării. în felul acesta se pot obţine 10 x 5 = 50 de grupuri diferite a câte 4 piese, destinate mutării.

Completare la jocul 1. Organizaţi următorul joc întrecere. Aşezaţi în faţa fiecărui participant la joc câte 10 piese de table (sau rotocoale de carton) în două

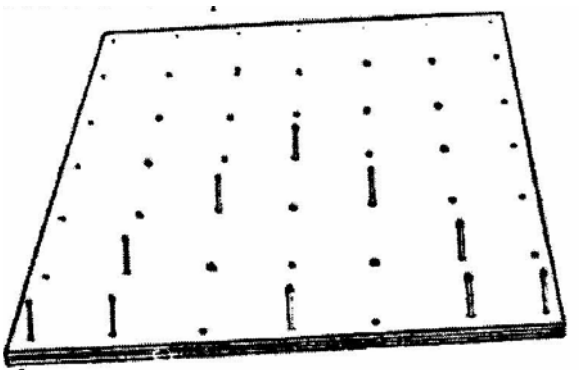
rânduri, şi fiecare din ei, fără să arate celorlalți, să mute 4 piese (3 dintr-un rând şi 1 din celălalt) astfel, încât să formeze 5 rânduri a câte patru piese în fiecare rând. Comparați soluțiile. Acei jucători care au configurații identice de piese capătă un punct; configurația care se deosebeşte de toate celelalte este notată cu 2 puncte.



Cei care nu au rezolvat problema în limita timpului stabilit nu primesc nici un punct. Repetând de câteva ori jocul, totalizați punctele obținute de fiecare participant şi stabiliți învingătorul. Acest joc poate fi organizat şi altfel: fiecărui participant i se dă o coală de hârtie şi o riglă. Piesele se înlocuiesc prin puncte desenate pe hârtie şi aranjate inițial tot în 2 rânduri a 5 puncte. Jocul va consta în tăierea a 3 puncte dintr-un rând şi a unui punct din celălalt, care vor fi înlocuite cu alte 4 puncte, aşa fel ca împreună cu cele 3 rămase să formeze 5 rânduri a câte 4 puncte în fiecare rând.

Altă completare la jocul 1. Se admite mutarea a 4 piese, câte 2 din fiecare rând, şi se îngăduie să se aşeze o piesă peste alta. în acest caz vor fi posibile şi rezolvări de felul celor arătate în schema de mai sus. în felul acesta numărul soluțiilor posibile se majorează considerabil.

Jocul 2. Perforați o coală de carton astfel, încât să se obțină 49 de orificii mici. Orificiile vor fi perforate la distanțe egale, ca să rezulte un pătrat cu latura de 7 orificii.



În 10 orificii introduceți câte un chibrit în ordinea arătată mai sus. Jocul constă în rezolvarea unor probleme de tipul următor. Să se scoată 3 chibrituri, indiferent care, şi să se introducă în alte orificii ale cartonului, astfel ca să se formeze 5 rânduri de câte 4 chibrituri fiecare.

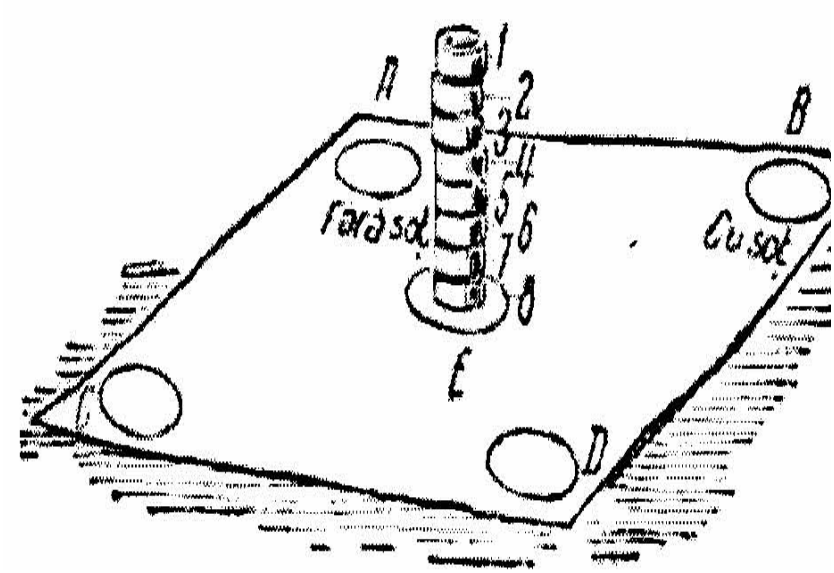
Rezolvați mai întâi problema pentru cazul dat în figura de mai sus, iar după aceea o puteți varia, schimbând aşezarea inițială a chibriturilor şi numărul rândurilor care trebuie formate.

Observație! În loc de carton vă puteți folosi foarte bine de plastilină.

90. Cu soț şi fără soț (şaradă)

Aşezați în cercul din centru 8 piese de table numerotate astfel încât să se formeze o coloană în ordinea numerelor, cu cifra 8 jos şi cu cifra 1 sus. Se cere să mutați în cât mai puține mişcări piesele cu cifrele 1, 3, 5 şi 7 din coloana centrală în cercul fără soț, iar piesele cu cifrele 2, 4, 6 şi 8 în cercul cu soț. Se consideră mutare orice schimbare a piesei dintr-un loc într-altul.

La o mutare se poate trece dintr-un cerc într-altul doar o singură piesă (de fiecare dată cea de deasupra). Totodată nu este permis să se aşeze o piesă numerotată cu un număr mai mare peste o piesă care are un număr mai mic şi nu se admite ca peste o piesă cu un număr par să se aşeze o piesă cu număr impar, sau invers.



Respectând regulile, mutați piesele în cercurile cu soț şi fără soț

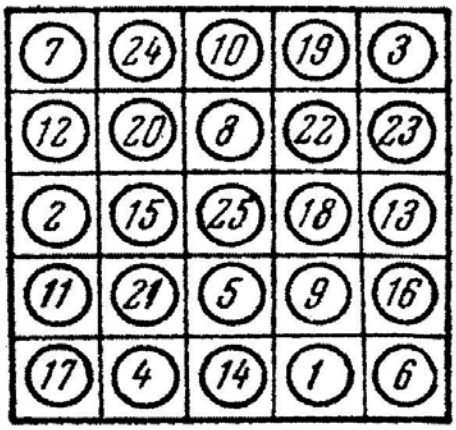
Este îngăduit, de pildă, să se aşeze piesa cu cifra 1 peste piesa cu cifra 3, piesa cu cifra 3 peste piesa cu cifra 7 sau piesa cu cifra 2 peste piesa cu cifra 6, dar nu invers şi nu este permis să se aşeze piesa cu cifra 1 peste piesa cu cifra 2 sau pies cu cifra 4 peste piesa cu cifra 7.

În câte mutări puteți rezolva problema?

91. Punerea în ordine a pieselor de table

Aranjați 25 de piese numerotate în 25 de căsuțe pătrate. Schimbând reciproc locul pieselor, puneți-le în ordine, adică aşezați numerele 1, 2, 3, 4, 5 de la stânga la dreapta în primul rând, numerele 6, 7, 8, 9, 10 de la stânga la dreapta în al doilea rând ş.a.m.d, până la sfârşit. Puteți schimba, de pildă între ele numerele 7 cu 1, 24 cu 2 etc.

Stabiliți care este cel mai mic număr de schimbări necesare. Pentru a evita mutări inutile, trebuie să elaborați un anumit sistem de mutări. Gândiți-vă!

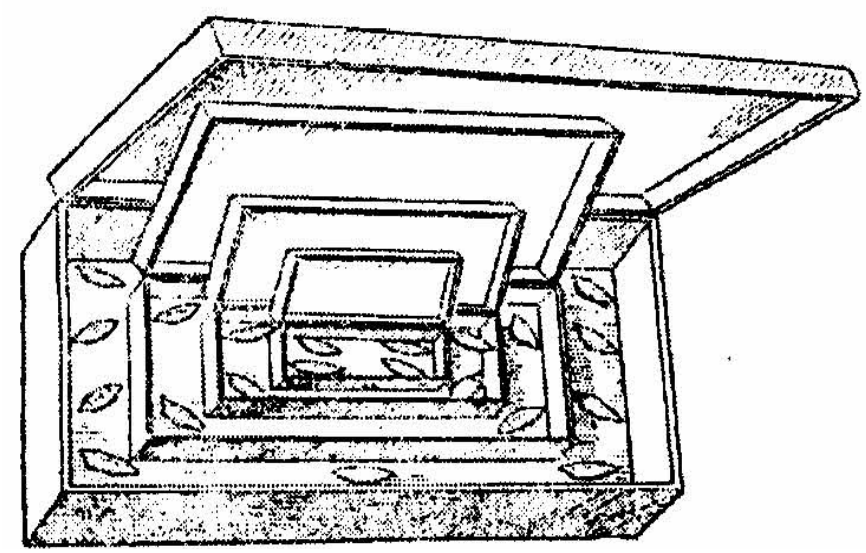


92. Cadoul - şaradă

Există o jucărie de forma unei cutiuțe. Când o deschizi, înăuntrul ei dai de altă cutiuță; o deschizi şi pe aceasta, şi înăuntrul ei găseşti o cutiuță şi mai mică. Confecționați asemenea jucărie din 4 cutiuțe. În cutiuța interioara, cea mai mică, punei 4 bomboane. Tot câte 4 bomboane puneți în fiecare din cele 2 cutiuțe următoare şi 9 bomboane în cea mai mare.

În felul acesta în cele 4 cutiuțe se vor găsi în total 21 bomboane. Dăruiți această cutiuță cu bomboane prietenului vostru de ziua lui, cu condiția să nu mănânce bomboanele până când nu va aşeza cele 21 de bomboane în aşa fel, ca în fiecare cutiuță să se afle un număr par de perechi bomboane plus una. Fireşte că, înainte de a face acest cadou, trebuie ca voi înşivă să ştiți să rezolvați problema.

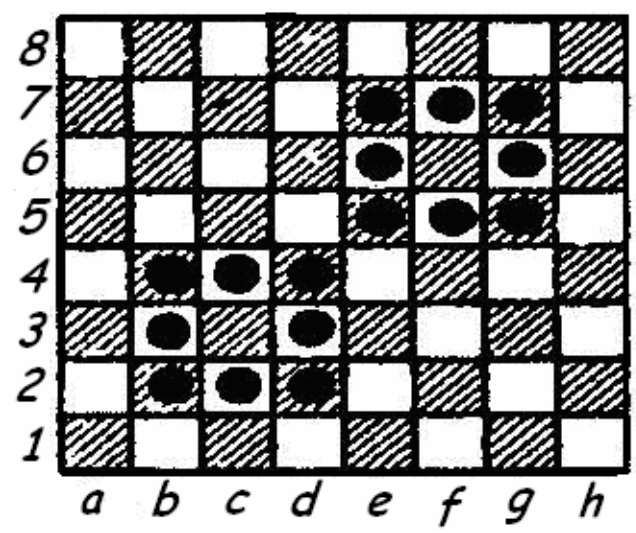
Să ştiți că în cazul de față nu vă va fi de ajutor nici o regula de aritmetică; e nevoie doar de puțină iscusință şi perspicacitate.



93. Prin mutarea calului

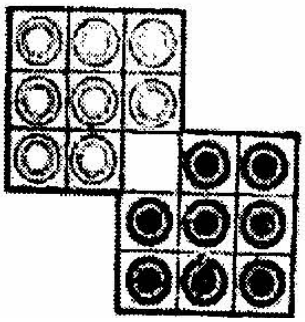
Pentru rezolvarea acestei amuzante probleme de şah nu este nevoie să ştii să joci şah. E suficient să ştii doar regula săriturii calului. Pe tabla de şah sunt aşezați

16 pioni negri (vezi schema de mai jos). Aşezaţi calul alb pe oricare pătrăţel al tablei de şah, aşa fel ca să puteţi lua cu el toţi pionii negri, în cât mai puţine mutări.



94. Mutarea pieselor de table

Luaţi 8 piese negre şi 8 piese albe şi aranjaţi-le aşa cum se arată mai jos. Se cere ca fără să se scoată piesele din câmp să se treacă în 46 de mutări toate piesele negre în locul celor albe, iar cele albe în locul celor negre.



Piesele se pot mişca înainte şi înapoi, la dreapta şi la stânga, dar nu pieziş. În aceleaşi direcţii se îngăduie să se sară peste o piesă într-o căsuţă liberă. Nu este permis să se aşeze 2 piese în aceeaşi căsuţă. Nu este nevoie să se respecte o anumită succesiune în mutarea pieselor albe şi negre; dacă este necesar se pot muta de câteva ori la rând piese de aceeaşi culoare.

95. O grupare originală a numerelor întregi de la 1 la 15

Priviţi cât de frumos pot fi aranjate toate numerele întregi de la 1 la 15 în 5 grupe de câte 3 numere fiecare:

$$\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\}\ d=7;\quad \left.\begin{matrix}4\\9\\14\end{matrix}\right\}\ d=5;\quad \left.\begin{matrix}2\\6\\10\end{matrix}\right\}\ d=4;\quad \left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\}\ d=2;\quad \left.\begin{matrix}11\\12\\13\end{matrix}\right\}\ d=1.$$

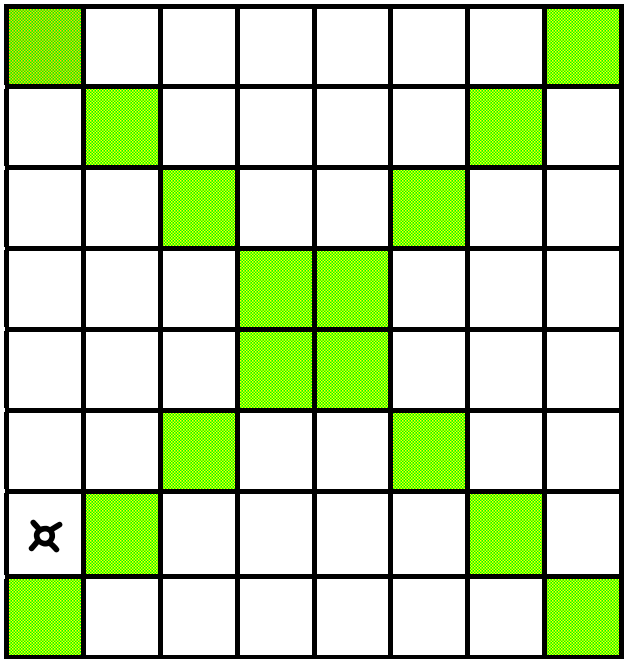
Numerele sunt astfel aranjate în grupe, încât în fiecare grupă diferenţa d este identică atât între numărul al doilea şi primul, cât şi între al treilea şi al doilea. De pildă, 8 - 1 = 7 şi 15 - 8 = 7; sau 9 - 4 = 5 şi 14 - 9 = 5 (un grup de numere cu diferenţa constantă între numerele învecinate alcătuieşte o succesiune denumită

progresie aritmetică). Această împărțire amuzantă a 15 numere ordinale întregi în 5 grupe cu diferențele de mai sus nu este unica posibilă. Lăsând neschimbată prima grupă de numere (1, 8, 15), restul de 12 numere (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) pot fi grupate în noi grupe de câte 3, menținându-se diferențele de mai înainte: d = 5; d = 4; d = 2 şi d = 1.

Găsiți această nouă grupare a numerelor date. Cei ce doresc pot încerca să aranjeze aceleaşi 15 numere, în grupe de progresii aritmetice cu alte valori ale lui d.

96. 8 steluțe

Într-una din căsuțele albe am aşezat o steluță. Aşezați în căsuțele albe încă 7 steluțe, în aşa fel încât niciodată 2 steluțe (din opt) să nu se găsească pe aceeaşi dreaptă orizontală, verticală sau oblică (diagonală). Problema trebuie rezolvată, fireşte, prin încercări; de aceea un interes suplimentar al problemei constă în introducerea unui sistem în procesul încercărilor.



97. Două probleme de aşezare a literelor

Problema 1. Într-un pătrat împărțit în 16 pătrățele egale, aşezați 4 litere în aşa fel, încât în fiecare rând orizontal şi vertical, precum şi în fiecare din cele 2 diagonale ale pătratului mare să nu se găsească decât o singură literă. Cât de mare este numărul soluțiilor acestei probleme în cazul când literele sunt identice? Dar dacă sunt diferite?

Problema 2. Într-un pătrat împărțit în 16 pătrățele egale, aşezați de 4 ori fiecare din cele 4 litere a, b, c şi d, în aşa fel încât în fiecare rând orizontal şi vertical, precum şi în fiecare din cele 2 diagonale ale pătratului mare să nu se găsească litere identice.

Câte soluții are această problemă?

98. Aşezarea unor pătrate de diferite culori

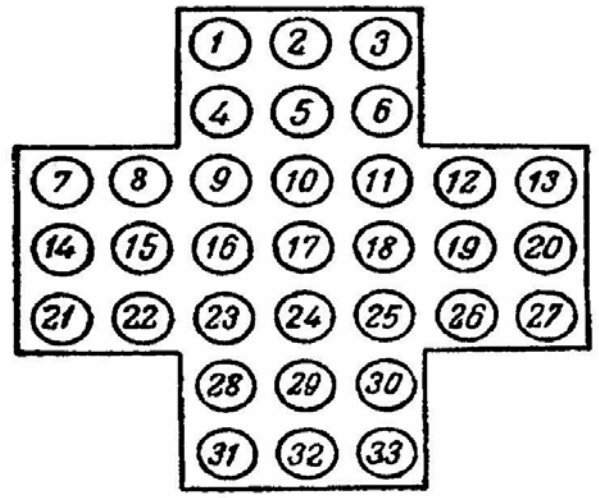
Pregătiți 16 pătrate de aceeaşi dimensiune, dar colorate în patru culori diferite, să zicem în alb, negru, roşu şi verde (câte patru pătrate de fiecare culoare). Veți obține patru grupe de pătrate de diferite culori. Pe fiecare pătrat din primul grup scrieți cifra 1, pe fiecare pătrat din al doilea grup - cifra 2, pe pătratele din grupul trei - cifra 3, iar pe pătratele din grupul patru cifra 4.

Aceste 16 pătrate de diferite culori trebuie aşezate de asemenea în formă de pătrat, în aşa fel însă ca în fiecare rând orizontal şi vertical, precum şi în fiecare din cele două diagonale să se afle pătrate cu cifrele 1, 2, 3 şi 4. Ordinea succesiunii este indiferentă, dar culorile trebuie să fie neapărat diferite.

Problema are foarte multe soluții. Poate puteți găsi un sistem după care să faceți aşezarea. Gândiți-vă puțin!

99. Ultima fisă

Vechi joc şaradă, cunoscut sub numele solitarul sau pustnicul, încă de pe la începutul sec. al XVIII-lea. Tăiați din carton 32 de fise identice (indiferent de formă) şi aşezați câte una în fiecare cerc. Deoarece sunt 33 de cercuri, unul din ele (oricare) va rămâne liber.



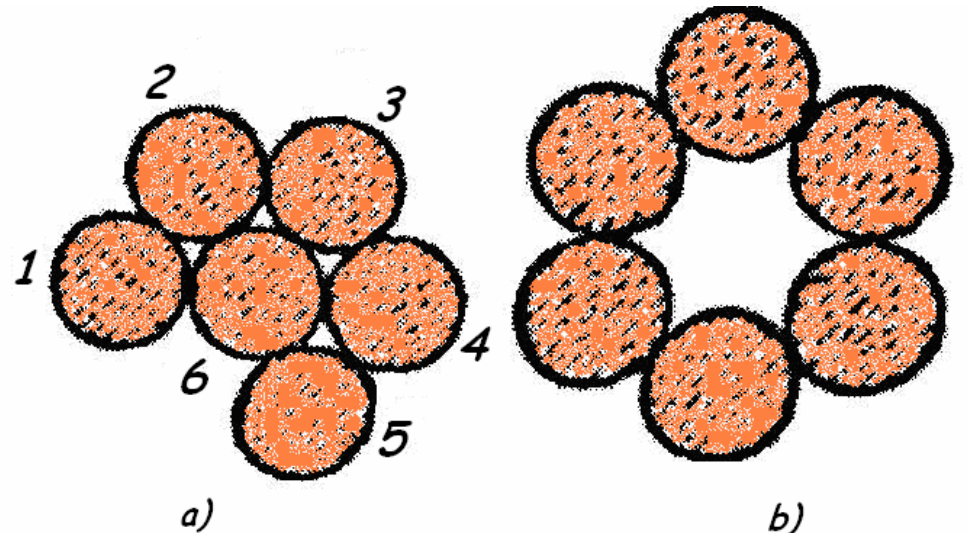
Se cere să se scoată toate fisele, în afară de una. Această ultimă fisă trebuie să rămână în cercul care inițial a fost liber. Mişcările pot fi făcute înainte, înapoi şi lateral, sărind cu o fisă peste alta într-un cerc liber. La fiecare mutare se scoate fisa peste care s-a sărit.

Prin urmare, problema trebuie rezolvată în 31 mutări.

100. Inel format din discuri

Luați 6 discuri egale şi aşezați-le strâns lipite unele de altele, aşa cum se arată mai jos. Se cere ca în 4 mutări aceste discuri să fie aranjate în formă de inel. O mutare constă în următoarele: imobilizând cu mâna 5 dintre discuri, al 6-lea disc trebuie rostogolit într-o poziție nouă fără a-l desprinde de restul discurilor, iar în poziția nouă el trebuie să atingă cel puțin 2 discuri. Rezolvarea acestei şarade în 4 mutări nu e chiar atât de simplă, cum s-ar părea la prima vedere. Ca discuri puteți folosi, de pildă, 6 monede identice sau 6 fise rotunde, decupate din carton.

Problemă suplimentară. Rezolvarea şaradei propuse constă în mutarea succesivă a discurilor.



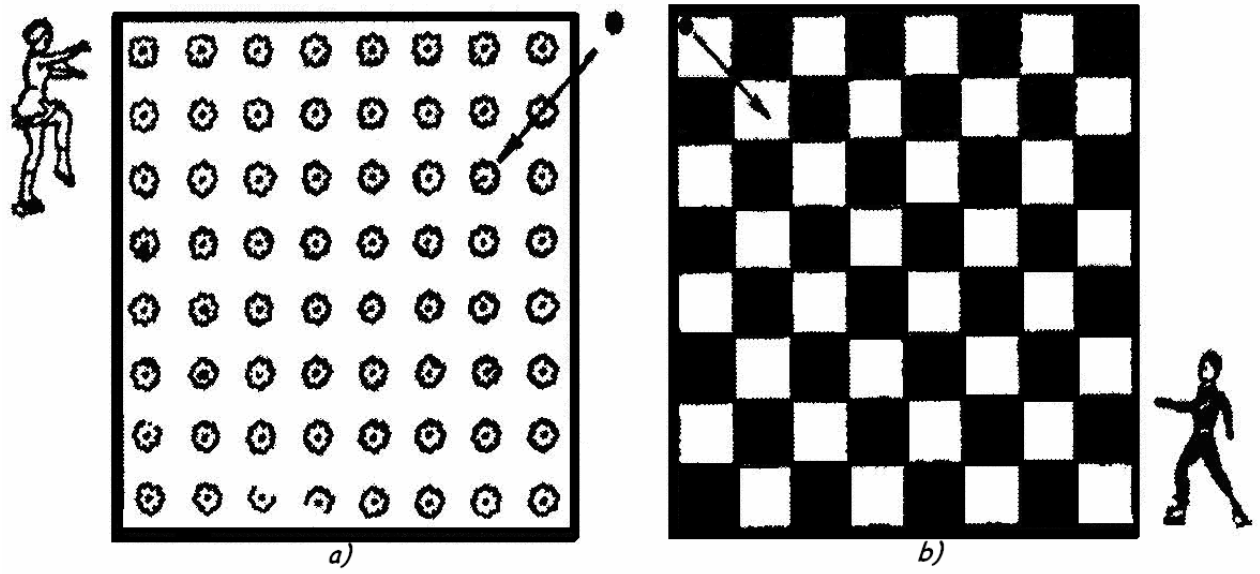
Schimbând ordinea mutărilor, se pot obține diferite soluții ale problemei. Se cere să se găsească toate soluțiile şaradei.

Pentru a nu vă încurca, numerotați discurile şi notați fiecare mutare după următorul sistem: 1 - 2, 3, ceea ce înseamnă: discul nr.1 trebuie rostogolit până la atingerea cu discurile nr.2 şi nr.3; 2 - 6, 5 înseamnă ca discul nr.2 trebuie rostogolit până la atingerea cu discurile nr.6 şi nr.5 etc. Iată un exemplu de rezolvare a şaradei: 1 - 2, 3; 2 - 6, 5; 6 - 1, 3; 1 - 6, 2.

Găsiți încă 23 de soluții!

101. Pe un patinoar cu gheață artificială

Pe patinoarul cu gheață artificială de la Moscova se repetă un spectacol pregătit de elevii „Şcolii de balet pe gheață". Pictorul decorator al spectacolului a desenat jumătate din patinoar sub forma unui covor ornamentat cu 64 de flori, iar cealaltă jumătate sub formă de parchet cu 64 de pătrățele alb - negre. Repetiția s-a întrerupt pentru pauză. În timpul pauzei un băiat şi o fată, doi patinatori neobosiți, continuau să descrie curbe pe luciul de oglindă al câmpului de gheață.

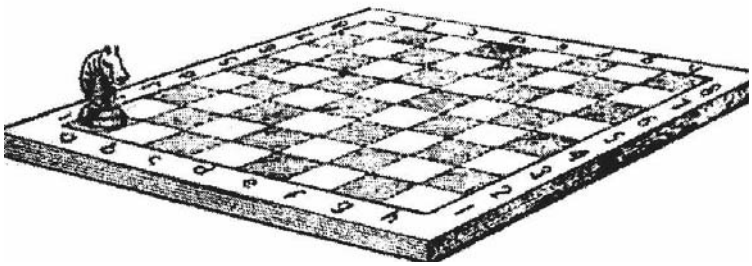


Pe fată au atras-o florile covorului de gheață şi a vrut să treacă dintr-o singură mişcare - fireşte, cu câteva întoarceri în diferite puncte ale câmpului - prin toate cele 64 de flori. Ea a hotărât să se deplaseze numai în linie dreaptă, astfel că ultimul drum rectiliniu s-o aducă exact în acelaşi loc de unde începuse mişcarea (însemnat în figură cu un punct negru). Ea a reuşit să realizeze ce şi-a propus, iar drumul ei a constat numai din 14 segmente rectilinii. Fata a trecut de câteva ori peste unele flori. Desenați pe o bucată de hârtie schema rutei pe care a mers fata.

Băiatul s-a antrenat pe cea de-a doua jumătate a câmpului de gheață. Aflând despre realizările geometrice ale colegei sale de patinaj, el a hotărât să nu rămână mai prejos şi şi-a propus o problemă geometrică mult mai complicată: patinând numai prin pătrățelele albe ale parchetului şi trecând numai o singură dată prin punctele de contact de la colțurile lor, să străbată toate pătrățelele albe pornind din pătratul alb din colțul stâng de sus şi terminând în colțul din dreapta, jos. Desenați schema drumului patinatorului, ştiind că drumul parcurs de el este compus din 17 segmente rectilinii.

102. Problema - glumă

Costel, elev în clasa a 4-a a unei şcoli medii, se străduieşte să mute calul de şah din colțul din stânga jos al tablei de şah (din pătratul **a1**) în colțul din dreapta sus (în pătratul **h8**), în aşa fel ca să treacă cu calul o singură dată prin fiecare pătrat al tablei.



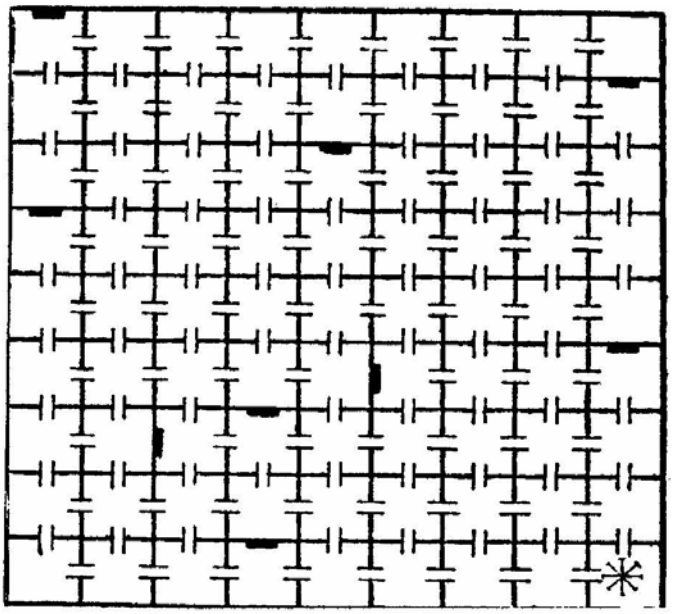
Deocamdată el nu a reuşit. Nu cumva se chinuieşte să soluționeze o problemă irezolvabilă? Lămuriți acest lucru din punct de vedere teoretic şi explicați-i lui Costel despre ce este vorba aici.

103. 145 de uşi (şaradă)

Feudalii din Evul Mediu transformau uneori subsolurile castelelor lor în închisori-labirinturi, cu tot felul de mecanisme secrete: celule cu pereți glisanți, galerii secrete, diferite capcane.

Când vizitezi un asemenea castel vechi, te laşi fără voie purtat pe aripile fanteziei. Să ne închipuim că într-un asemenea subsol, al cărui plan este desenat mai jos, a fost închis un om care a luptat împotriva feudalului. Subsolul - labirint fusese construit după următorul sistem: din 145 de uşi numai 9 erau încuiate (în figură ele sunt indicate cu linii groase), restul fiind larg deschise.

S-ar părea că era uşor să te apropii de uşa care dă spre ieşire şi să încerci s-o deschizi. Dar nu e chiar atât de simplu.



Uşa încuiată nu poate fi deschisă în nici un fel. Ea se va deschide însă singură dacă va fi exact a noua la număr, adică dacă mai înainte s-a trecut prin 8 uşi deschise. În felul acesta trebuiau să fie deschise şi să se treacă prin toate uşile încuiate ale subsolului; fiecare din ele se deschidea de asemenea singură, dacă înainte de a ajunge în dreptul ei se trecea tot prin 8 uşi deschise.

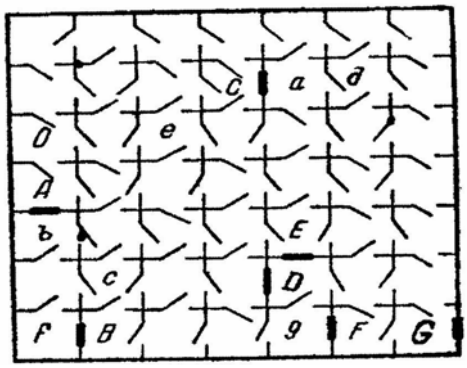
Dacă ai greşit socoteala şi vrei să treci prin 2-3 uşi din apropiere, pentru a face ca numărul uşilor deschise prin care ai trecut să fie 8, nu mai ai cum: îndată ce ai trecut printr-o cameră, toate uşile camerei respective, care mai înainte fuseseră deschise, se închid automat şi nu mai ai posibilitatea să treci a doua oară prin ea. Feudalul construise intenționat subsolul în felul acesta.

Un întemnițat cunoştea secretul labirintului şi vrând să evadeze a zgâriat cu un cui planul exact al subsolului pe peretele celulei sale (însemnată în plan cu o steluță). El s-a gândit mult timp ce drum să aleagă pentru ca să ajungă în dreptul uşilor încuiate, după ce trecuse în prealabil prin 8 uşi deschise. În cele din urmă el a rezolvat problema şi şi-a redobândit libertatea.

Care este ruta găsită de întemnițat?

104. Cum şi-a redobândit întemnițatul libertatea

Celor cărora le-a plăcut problema precedentă le propunem o altă variantă. Închipuiți-vă că închisoarea în care se chinuie întemnițatul este compusă din 49 de celule.



În 7 celule, însemnate în planul subsolului cu literele A, B, C, D, E, F, G există câte o uşă care se deschide numai cu câte o cheie. Dar cheia de la uşa celulei A se află în celula a, cheia de la uşa celulei B - în celula b, iar cheile de la uşile celulelor C, D, E, F, şi G se găsesc respectiv în celulele c, d, e, i şi g. Restul uşilor se deschid prin simpla apăsare pe clanță.

Uşile nu au însă clanțe decât pe o singură parte şi fiecare uşă se închide automat după ce s-a trecut prin ea. În planul subsolului se arată în ce direcție se poate trece prin fiecare uşă care se deschide fără cheie, dar nu se precizează în ce ordine trebuie să fie deschise uşile încuiate. Se poate trece de mai multe ori prin aceeaşi uşă, respectându-se, fireşte, condițiile stabilite. Întemnițatul se află în celula 0.

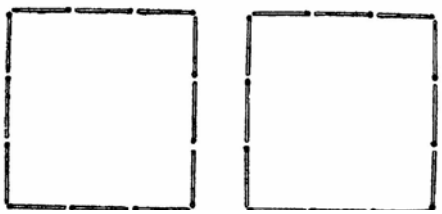
Arătați-i drumul care duce spre libertate.

GEOMETRIE CU CHIBRITURI

O cutie cu chibrituri sau o grămăjoară de beţişoare de lungime egală pot constitui un minunat mijloc pentru distracții geometrice, care necesită inventivitate şi dezvoltă ingeniozitatea. Din chibrituri se pot forma tot felul de figuri rectilinii; prin mutarea chibriturilor se poate transforma o figură în alta; chiar teoremele pot fi demonstrate cu ajutorul chibriturilor.

Să analizăm, de pildă, următoarea *problemă:*

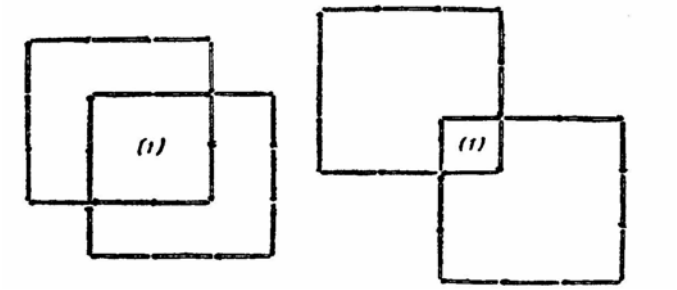
Câte pătrate egale se pot forma din 24 de chibrituri, fără a rupe beţele şi folosindu-le totodată pe toate? Dacă pentru fiecare latură a pătratului se folosesc câte 6 chibrituri (mai multe nu e posibil), se va obține un pătrat. Dacă latura pătratului este alcătuită din 5 sau din 4 chibrituri, nu se pot obține pătrate egale utilizându-se toate cele 24 de chibrituri. Cu o latură de 3 chibrituri se pot forma două pătrate.



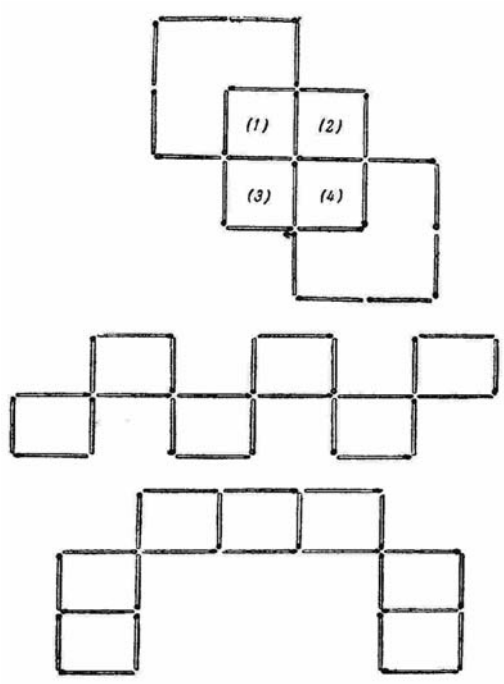
Cu o latură de 2 chibrituri — trei pătrate:



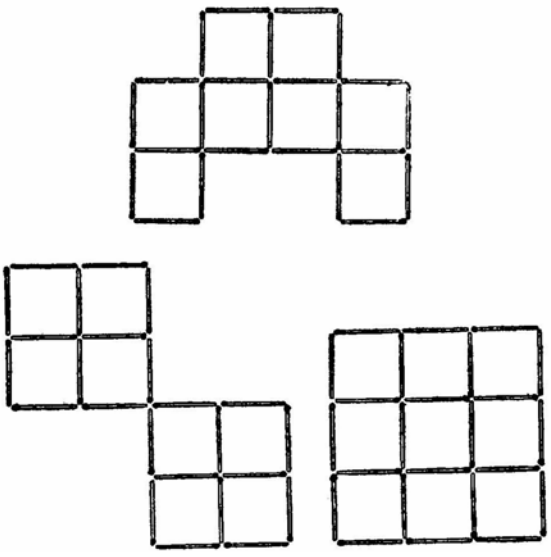
Observați că din pătrate cu laturi de 3 şi 2 chibrituri se pot forma pătrate suplimentare cu alte dimensiuni, aşa cum se arată în figurile următoare: un pătrat suplimentar (1) din pătrate cu latura de 3 chibrituri şi patru pătrate suplimentare (1-4) din pătrate cu latura de 2 chibrituri:



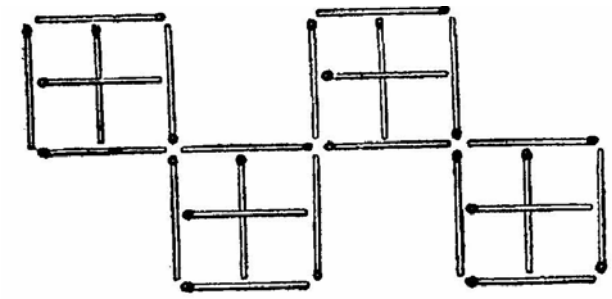
Dacă din fiecare 4 chibrituri se formează un pătrat, atunci din 24 de chibrituri se pot forma 6 pătrate egale.



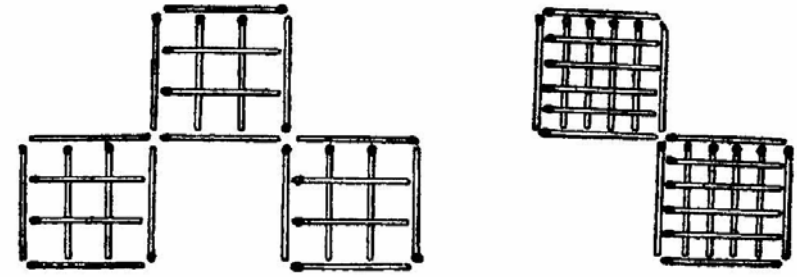
Din 24 chibrituri au fost construite 6 şi 7 pătrate.



Din 24 chibrituri au fost construite 8 şi 9 pătrate.



Din 24 chibrituri au fost construite 20 pătrate. Dacă însă unele chibrituri intră în construcția a două pătrate alăturate, atunci din 24 de chibrituri se pot forma 7 pătrate, 8 pătrate sau chiar 9 pătrate egale. Cu prilejul alcătuirii ultimelor trei figuri s-au format pătrate suplimentare cu alte dimensiuni.



Din 24 chibrituri au fost construite 42 şi 50 pătrate.

Cu o latură a pătratului formată din jumătate de chibrit (se admite aşezarea chibriturilor de-a curmezişul), se pot obține 16 pătrate de dimensiuni egale şi 4 pătrate suplimentare, adică în total 20 de pătrate. Dacă reducem latura la 1/3 de chibrit, din 24 de chibrituri se pot forma 27 pătrate egale, iar împreună cu pătratele suplimentare de alte dimensiuni - 42. în sfârşit, dacă micşorăm latura la 1/5 de chibrit, obținem 50 pătrate de dimensiuni egale, iar dacă vom socoti şi pătratele suplimentare (în număr de 60), vor rezulta în total 110 pătrate. Gândiți-vă cum pot fi rezolvate următoarele probleme şarade:

105. 5 şarade

Din 12 chibrituri au fost formate patru pătrate egale; cu această ocazie s-a format şi un pătrat suplimentar. Se cere:

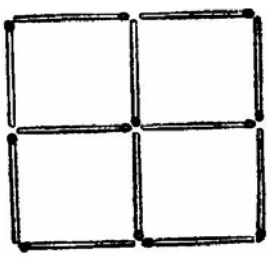
a) să se scoată 2 chibrituri, lăsând restul neatinse, şi să se obțină două pătrate inegale;

b) să se mute 3 chibrituri astfel, încât să, se obțină trei pătrate egale;

c) mutând 4 chibrituri, să se formeze 3 pătrate egale;

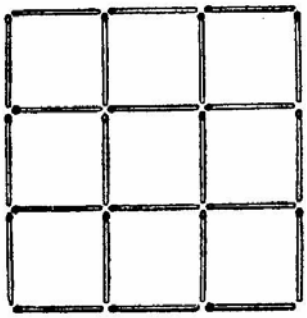
d) mutând 2 chibrituri, să se formeze 7 pătrate (la această problemă şi la cea următoare se admite aşezarea chibriturilor de-a curmezişul);

e) mutând 4 chibrituri, să se obțină 10 pătrate.



106. Încă 8 şarade

Din 24 de chibrituri a fost construit un pătrat mare, cu 9 pătrate interioare.



Se cere:

a) să se mute 12 chibrituri, ca să se obțină 2 pătrate egale;

b) să se scoată 4 chibrituri, astfel încât cele rămase să formeze un pătrat mare şi alte patru;

c) să formeze 5 pătrate egale, scoțând fie 4, fie 6 din 8 chibrituri;

d) să se scoată 8 chibriturituri, în aşa fel ca cele rămase să formeze patru pătrate egale (2 soluții);

e) să se scoată 6 chibrituri, formând 3 pătrate;

f) să se scoată 8 chibrituri, astfel încât să rămână 2 pătrate (2 soluții);

g) să se scoată tot 8 chibrituri, în aşa fel încât să rămână 3 pătrate;

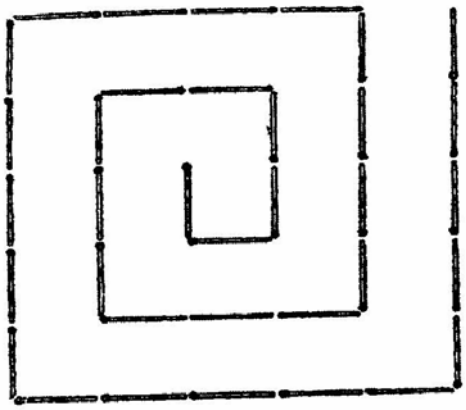
h) să se scoată 6 chibrituri, spre a obține 2 pătrate şi 2 hexagoane neregulate egale.

107. Din 9 chibrituri

Din 9 chibrituri să se alcătuiască 6 pătrate (se admite aşezarea chibriturilor de-a curmezişul).

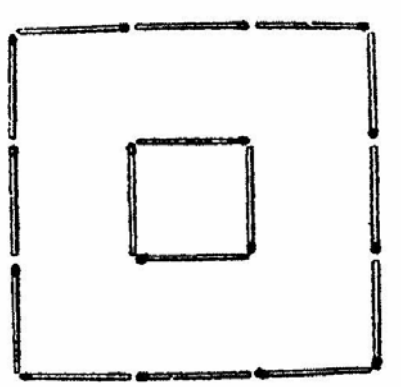
108. Spirala

Din 35 de chibrituri a fost formată o figură asemănătoare unei spirale. Mutați 4 chibrituri astfel, încât să se formeze 3 pătrate.



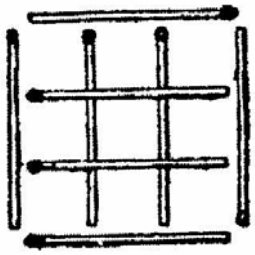
109. O farsă

Din 16 chibrituri a fost alcătuit planul unei cetăți înconjurată de un şanț adânc. Cum se poate ajunge la cetate cu ajutorul a două scânduri (2 chibrituri) a căror lungime este egală cu lățimea şanțului?



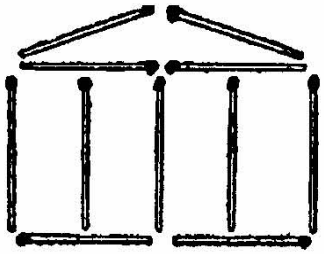
110. Să se scoată 2 chibrituri

Figura de mai jos este alcătuită din 8 chibrituri, din care unele aşezate de-a curmezişul. Să se scoată 2 chibrituri, în aşa fel ca să rămână 2 pătrate.



111. Fațada casei

Fațada casei este construită din 11 chibrituri. Mutând 2 chibrituri se pot obține 11 pătrate, iar mutând 4 chibrituri, această casă poate fi transformată într-o figură cuprinzând 15 pătrate. Încercați!



112. Farsă

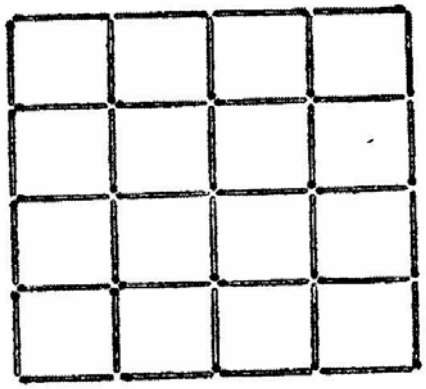
Aşezați în aşa fel chibrituri, încât să obțineți un pătrat.

113. Triunghiuri

Pentru alcătuirea unui triunghi echilateral sunt necesare 3 chibrituri (întregi), iar pentru a forma 6 triunghiuri echilaterale egale sunt suficiente 12 chibrituri. Construiți-le! După aceasta mutați 4 chibrituri, astfel încât să se formeze 3 triunghiuri echilaterale, dintre care numai două să fie egale între ele.

114. Câte chibrituri trebuie scoase?

Aveți 16 pătrate egale:



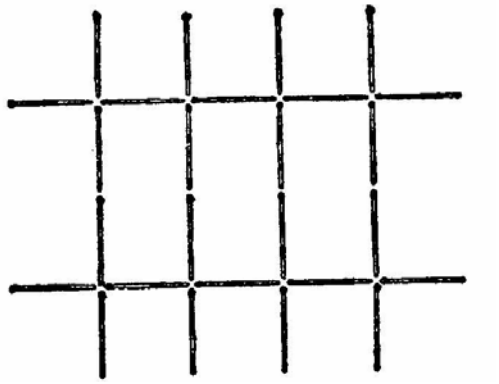
Dacă veți număra însă toate pătratele care există în această figură, veți constata că ele sunt în număr de ... M-am răzgândit; mai bine numarați-le singuri! Acum spuneți-mi câte chibrituri (minimum) trebuie scoase, pentru ca figura rămasă să nu conțină nici un pătrat mare şi nici unul mic?

115. Farsă

Fiecare chibrit este lung de 4,5 cm. Cum trebuie să se procedeze pentru a forma din 17 chibrituri un metru?

116. Gardul

Din gardul următor trebuie să mutați 14 chibrituri, astfel ca să obțineți 3 pătrate.

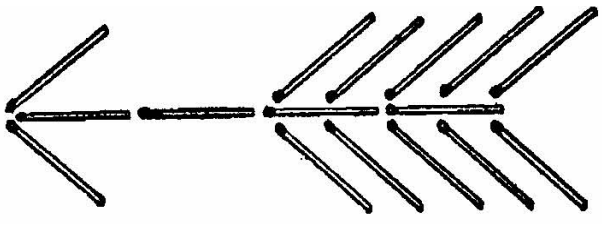


117. Farsă

Cu ajutorul a două chibrituri, fără a le frânge sau a le despica, să se formeze un pătrat.

118. Săgeata

Avem o săgeată alcătuită din 16 chibrituri. Se cere:



a) să construiți 8 triunghiuri egale, mutând 8 chibrituri;

b) să mutați 7 chibrituri, aşa fel ca să obțineți 5 patrulatere egale.

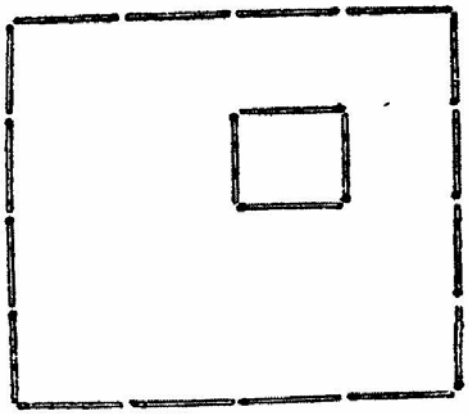
119. Pătrate şi romburi

Din 10 chibrituri să se formeze 3 pătrate. Apoi să se scoată un chibrit şi din cele 9 rămase să se alcătuiască un pătrat şi două romburi.

120. O figură din mai multe poligoane

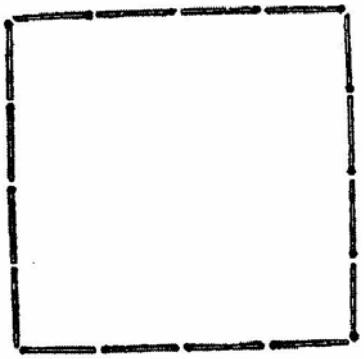
Aşezați în aşa fel 8 chibrituri, încât să se formeze un octogon, două pătrate şi 8 triunghiuri, cuprinse toate într-o singură figură.

121. Parcelarea livezii



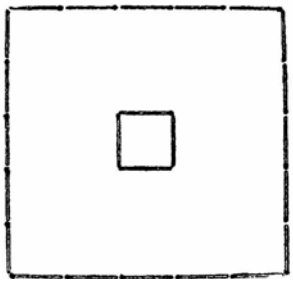
16 chibrituri, aranjate în formă de pătrat, reprezintă gardul unei livezi. O parte din suprafața acestei livezi este ocupată de locuința pomicultorului, marcată în figură printr-un pătrat format din 4 chibrituri. Restul suprafeței trebuie împărțit, cu ajutorul a 10 chibrituri, în 5 parcele, egale ca formă şi suprafață.

122. În părți de mărime egală



a) Să se împartă cu ajutorul a 11 chibrituri pătratul de mai sus, format din 16 chibrituri, în 4 suprafețe echivalente, în aşa fel ca fiecare suprafață să se mărginească cu celelalte trei.

b) Grădina, al cărei contur este marcat cu ajutorul a 20 de chibrituri şi în mijlocul căreia se află o fântână pătrată, trebuie:



1) împărțită cu ajutorul a 18 chibrituri în 6 părți egale şi identice ca formă;

2) împărțită cu ajutorul a 20 chibrituri în 8 părți egale şi identice ca formă.

123. Parchetul

Câte chibrituri sunt necesare pentru a se alcătui din pătrate egale un metru pătrat? Lungimea medie a chibritului este de 5 cm.

124. Raportul dintre suprafețe se păstrează

Din 20 de chibrituri au fost alcătuite 2 dreptunghiuri: unul din 6, iar celalalt din 14 chibrituri.



Primul dreptunghi este împărțit cu linii punctate în două pătrate, iar al doilea - în 6. Prin urmare, suprafața celui de al doilea dreptunghi este de 3 ori mai mare decât suprafața celui dintâi, împărțiți acum aceleaşi 20 de chibrituri în alte două grupe de 7 şi 13 chibrituri.

Alcătuiți din fiecare grup de chibrituri câte o figură (ele pot avea forme diferite), în aşa fel ca aria celei de a doua figuri, să fie de trei ori mai mare decât aria primei.

125. Să se găsească conturul figurii

Se dau 12 chibrituri. Să considerăm fiecare din ele drept unitate de lungime. Se cere să se alcătuiască din 12 chibrituri o figură care să cuprindă o arie de 3 unități la pătrat. Este o problemă grea, dacă vom face excepție de cazul foarte simplu al unei figuri alcătuite din 3 pătrate înlănțuite succesiv la vârfuri.

126. Să se găsească demonstrația

Aşezați 2 chibrituri alături, astfel încât ele să alcătuiască o linie dreaptă, şi *demonstrați* prin raționamente justețea construcției dvs. Pentru demonstrare este necesară o construcție suplimentară de chibrituri, pentru care puteți folosi orice număr de chibrituri.

127. Să se construiască şi să se demonstreze

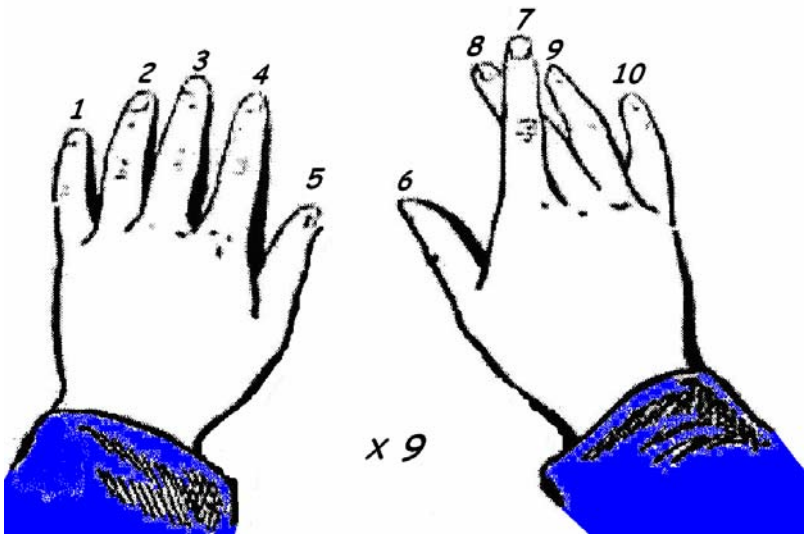
Să se construiască din chibrituri un hexagon regulat. Să se demonstreze justețea construcției.

Capitolul 2 Proprietățile cifrei 9

Unele particularități ale operațiilor artimetice cu numere întregi sunt legate de cifra 9. Orice proprietate a cifrei 9 pe care ați sesizat-o poate servi ca pretext pentru cele mai variate distracții matematice. Cunoaşteți, de pildă, regula divizibilității cu 9: un număr se împarte la 9 dacă suma cifrelor din care este compus se împarte la 9. De aici rezultă ca suma cifrelor produsului oricărui număr cu 9 este egală cu nouă sau cu un multiplu al lui (adică se divide cu 9). De pildă, 354 x 9 = 3186, atunci 3 + 1 + 8 + 6 = 18 (se împarte la 9). De aceea, când un elev din clasa întâi se plângea că îi vine greu să memoreze tabla înmulțirii primelor zece numere cu 9, tatăl lui i-a recomandat o metodă simplă, aceea de a-şi ajuta memoria cu degetele de la mână. Iată această metodă:

Prin mişcarea unui deget. Aşezați ambele mâini pe masă şi întindeți degetele. Fiecare deget de la stânga la dreapta va reprezenta numărul ordinal corespunzător: primul din stânga - 1, al doilea - 2, al treilea - 3, al patrulea - 4, al zecelea - 10. Avem de înmulțit, de pildă, oricare din primele zece numere cu 9. Pentru aceasta este suficient, fără să ridicați mâinile de pe masă, să ridicați degetul care reprezintă deînmulțitul. Atunci numărul degetelor aflate în stânga celui ridicat va reprezenta numărul zecilor din produs, iar numărul degetelor din dreapta lui - numărul unităților.

Exemplu: avem de înmulțit 7 cu 9. Aşezați mâinile pe masă şi ridicați al şaptelea deget; în stânga degetului ridicat se află 6 degete, iar în dreapta 3. Aşadar rezultatul înmulțirii lui 7 cu 9 este 63.



Această înmulțire mecanică, uimitoare la prima vedere, va deveni limpede îndată ce ne vom reaminti că suma cifrelor fiecărui produs din tabla înmulțirii cu 9 este egal cu 9, iar numărul zecilor din produs este întotdeauna mai mic cu 1 decât numerele pe care le înmulțim cu 9. Prin ridicarea degetului corespunzător subliniem tocmai acest lucru, şi prin urmare ... înmulțim.

Mâna omului este una din primele maşini de calculat.

Alte proprietăți. Iată alte câteva proprietăți interesante şi utile pentru viitor, în legătură cu cifra 9.

1. Se împarte întotdeauna la 9:

a) diferența dintre orice număr şi suma cifrelor lui;

b) diferența dintre două numere cu cifre identice, dar aşezate în mod diferit;

c) diferența dintre două numere care au suma cifrelor identică.

2. Dacă din oricare cifre sunt compuse numere ce se deosebesc doar prin ordinea succesiunii cifrelor, atunci la împărțirea cu 9 a fiecăruia din ele rămâne acelaşi rest. El este egal cu restul împărțirii la 9 a sumei cifrelor oricăruia din numerele respective.

3. Dacă vom denumi *prisos* restul rămas din împărțirea sumei cifrelor unui număr la 9, atunci:

a) prisosul sumei/diferenței numerelor este egal cu prisosul sumei/diferenței sumei prisosurilor termenilor;

b) prisosul produsului a două numere este egal cu prisosul produsului prisosurilor numerelor date.

Puteți verifica cu uşurință aceste proprietăți prin exemple numerice, iar dacă ştiți algebră puteți să le şi demonstrați. După ce v-ați dumerit asupra rezolvării problemelor din acest capitol, puteți folosi multe din ele ca trucuri matematice.

128. Care cifră a fost ştearsă

Problema 1. Rugați un prieten să scrie, fără să vă arate, un număr format din trei sau mai multe cifre, să-l împartă la 9 şi să vă spună restul rămas. Apoi propuneți-i să şteargă din numărul ales de el o singură cifră (oricare); numărul format după ştergerea cifrei să-l împartă iarăşi la 9 şi să vă spună din nou restul acestei împărțiri. Veți putea indica imediat cifra care a fost ştearsă, călăuzindu-vă după următoarele reguli:

a) dacă al doilea rest este mai mic decât primul, atunci, scăzând din primul rest pe cel de-al doilea, veți obține tocmai cifra ştearsă;

b) dacă al doilea rest este mai mare decât primul, atunci cifra ştearsă o veți obține scăzând al doilea rest din primul mărit cu 9;

c) dacă resturile sunt egale, atunci cifra ştearsă este fie 9, fie 0. Ştiți de ce?

Problema 2. Propuneți acum prietenului să se gândească la două numere cu cifre identice, dar aşezate în ordine diferită, şi să scadă pe cel mai mic din cel mai mare. Fireşte că nu trebuie să vă comunice nici numerele alese, nici diferența obținută. Cereți-i însă să şteargă una din cifrele diferenței (în afară de 0) şi să vă spună suma cifrelor rămase. Pentru a numi cifra ştearsă este suficient să completați numărul comunicat până la cel mai apropiat multiplu al lui 9.

De exemplu: 72.105 – 25.071 = 47.034. Ştergem cifra 3. Suma cifrelor rămase: 4 + 7 + 4 = 15. Completarea numărului 15 până la cel mai apropiat multiplu al lui 9, adică 18, este egală cu 3, care ne dă tocmai cifra ştearsă. Care este explicația?

Observație. Problema poate fi variată în diferite chipuri, bazându-ne pe proprietățile arătate mai sus ale numărului 9. De pildă, se poate propune să se scadă din numărul dat suma cifrelor lui, să se şteargă o cifră din diferență (în afară de 0 şi 9) şi să se indice suma cifrelor rămase. Pentru ghicirea cifrei şterse folosim aceeaşi metodă.

Problema 3. Scriem un număr oarecare, de pildă 7.146. Ştergem o cifră, de pildă 4. Din numărul rămas (care are o cifră mai puțin) scădem suma cifrelor numărului inițial (18). În exemplul nostru vom obține: 716 - 18 = 698. Rezultatul se anunță. Cum se poate afla cifra ştearsă, cunoscând rezultatul scăderii?

Problema 4. Scrieți două sau mai multe numere cu acelaşi număr de cifre. Voi adăuga tot atâtea numere şi mă voi îndepărtă, rugându-vă să ştergeți orice cifră doriți, în afară de zero, şi să faceți adunarea numerelor rămase. Dacă îmi veți comunica suma sau măcar suma cifrelor sumei, vă voi spune imediat care cifră a fost ştearsă. De exemplu:

605
218 } numerele scrise de tine

781
394 } numerele adaugate de mine

1298

Suma cifrelor sumei 1 + 2 + 9 + 8 = 20. Este ştearsă cifra 7. Cum am ales numerele pe care le-am adăugat eu şi cum se poate afla cifra ştearsă?

Problema 5. În problema precedentă se recomandă să se adauge tot atâtea numere câte au fost scrise de cel care a ales primele cifre. Dar în aceleaşi condiții ne putem limita numai la adăugarea unui singur număr. De exemplu:

3521
4086 } numerele scrise de tine
7219

4272 numarul adaugat de mine

1298

Suma cifrelor sumei 1 + 9 + 1 + 8 = 19. A fost ştearsă cifra 8. Ce număr trebuie să adaug în acest caz şi cum pot afla cifra ştearsă?

Problema 6. Aceeaşi idee poate fi exprimată şi altfel. Propuneți să se scrie alături câteva coloane de numere cu o singură cifră, iar dumneavoastră adăugați în dreapta sau în stânga - după dorința partenerului - încă o coloană de numere, în aşa fel ca fiecare număr adăugat să completeze suma numerelor dintr-un rând până la un multiplu al lui 9. Acum puteți, fără teamă, să propuneți partenerului să şteargă o cifră oarecare, să adune numerele rămase după regula adunării numerelor cu mai multe cifre şi să vă comunice suma rezultată. Aflând suma cifrelor rezultatului şi folosind regula cunoscută, puteți preciza lesne cifra ştearsă. De exemplu:

coloana adaugata de mine	coloana scrisa de partener
6	3246
4	4802
4	7421
5	1921
9	5238
30	2198

Suma cifrelor sumei, fără 9: 3 + 2 + 1 + 8 = 14; 18 - 14 = 4.

S-a şters cifra 4. E interesant că în loc să adăugați o coloană de numere vă puteți mărgini la un singur număr de o cifră, adăugat în oricare loc.

Aflați cum se poate realiza aceasta.

129. O însuşire ascunsă

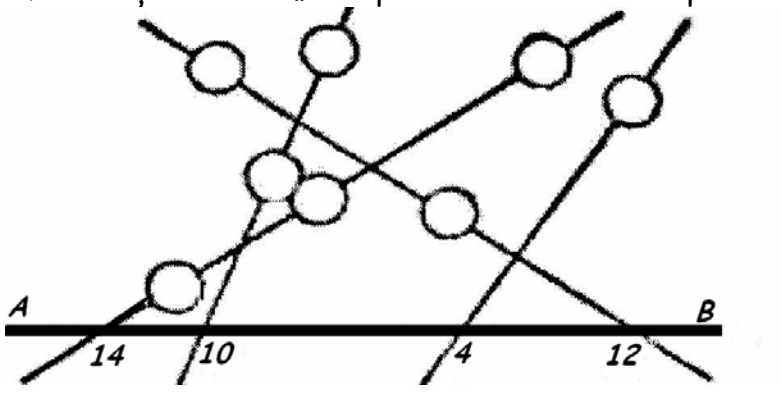
Numărul 1.313 se memorează uşor; de aceea, cel care vrea să demonstreze prietenilor săi un truc cu o cifră ştearsă poate manipula uşor cu el. Pentru aceasta, propuneți prietenilor voştri să scrie numărul 1.313 şi să scadă din el un număr pe care îl indicați.

Pentru scădere puteți indica orice număr: fiecărui participant - altul. Apoi fiecare din ei trebuie să adauge în stânga sau în dreapta numărului obținut după scădere (fiți atenți: nu adună, ci adaugă) numărul pe care l-a scăzut, dar mărit cu 100, iar din numărul rezultat să şteargă orice cifră, în afară de zero, comunicându-vă cifrele rămase. Cu ajutorul acestor cifre puteți preciza cu uşurință cifra ştearsă.

Care din particularitățile numărului 1.313, legată de proprietatea cifrei 9, ne ajută să numim cifra ştearsă şi cum se poate face acest lucru?

130. Alte câteva metode distractive pentru găsirea cifrei care lipseşte

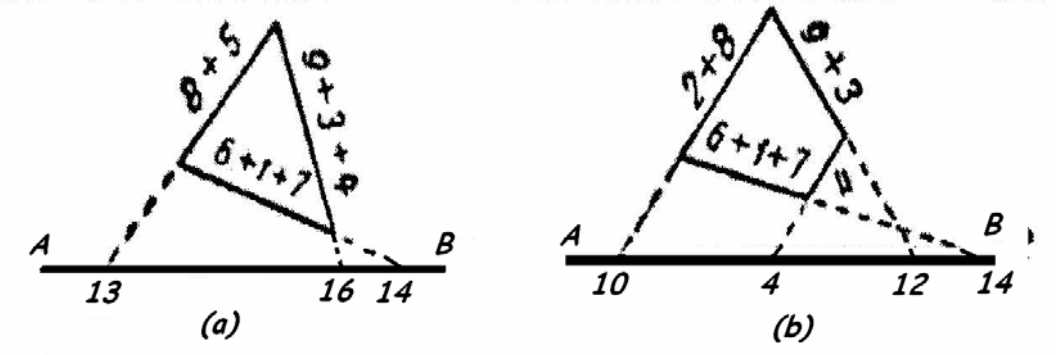
Problema 1. Din nouă cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9 aleg opt şi le scriu la întâmplare, fără nici o ordine, pe o foaie de hârtie. Pentru a nu vă arăta ce cifre am ales, le-am înlocuit în figură cu cerculețe. Dedesubtul cifrelor trag dreapta AB şi o denumesc „dreapta sumelor". Apoi reunesc cifrele la întâmplare prin câteva linii drepte sau frânte - la alegerea mea - dar iau fiecare cifră numai o singură dată. Sub „drepta sumelor" notez suma cifrelor aflate de-a lungul fiecărei linii şi vă arăt numai numerele care au fost obținute sub „dreapta sumelor" sau vă spun suma cifrelor lor.



Numerele notate sub „dreapta sumelor" ne dau următoarea sumă a cifrelor:

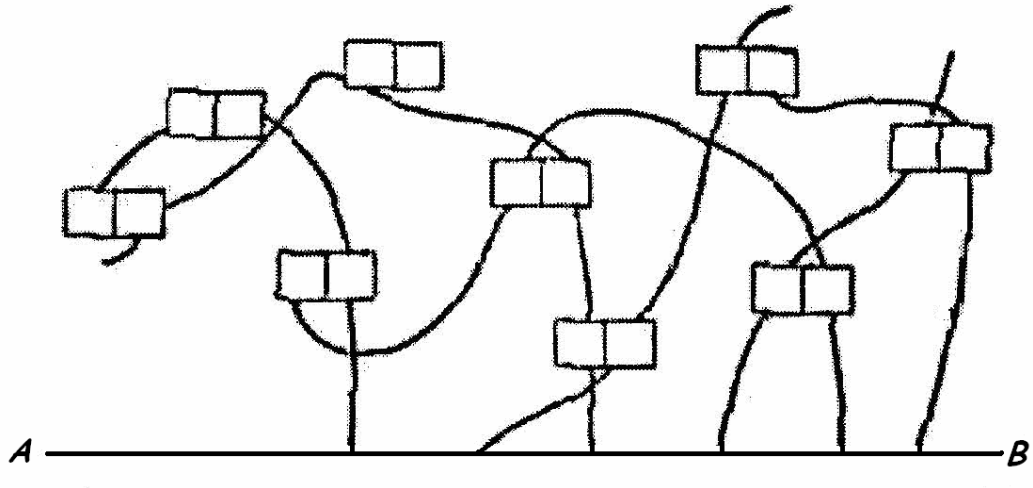
1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13

Cunoscând numai acest număr, stabiliți care cifră din cele 9 alese inițial n-a fost folosită.



Observație! În loc să împrăştii cifrele alese pe foaia de hârtie, le pot scrie, în ordinea pe care o doresc, de-a lungul laturilor unui triunghi desenat dinainte (a), ale unui patrulater (b) sau ale unui poligon, şi sub „dreapta sumelor" să scriu suma cifrelor aşezate de-a lungul fiecărei laturi a figurii alese.

Problema 2. Acum scriu la întâmplare pe o foaie de hârtie numerele 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Trag din nou „dreapta sumelor" şi reunesc prin câteva linii toate cifrele numerelor, în afară de una - cea aleasă în aşa fel încât fiecare cifră - să fie tăiată numai de o singură linie. Pentru a nu va arăta cifra pe care am ales-o în figura următoare fiecare număr este înlocuit cu un dreptunghi cu două despărțituri, corespunzătoare cifrelor numărului respectiv.



Notez sub „dreapta sumelor" sumele cifrelor din care sunt alcătuite numerele situate de-a lungul fiecărei linii şi vă rog din nou să stabiliți pe baza lor cifra omisă. Cei care au înțeles problema precedentă o vor rezolva lesne şi pe aceasta.

Problema 3. Scrieți toate numerele ordinale de la 1 la 8 şi alegeți unul. Restul de şapte numere aranjați-le cum doriți, în două sau mai multe coloane. Adunați toate numerele, considerându-le numere cu mai multe cifre, şi comunicați-mi suma lor sau suma cifrelor care formează suma. Voi stabili cu repeziciune numărul pe care l-ați ales. Cum procedez?

131. Pe baza unei cifre din rezultat se stabilesc celelalte trei

Un număr oarecare format din două cifre identice a fost înmulțit cu 99. E lesne de înțeles că produsul va fi un număr cu patru cifre. S-a păstrat însă numai o singură cifră din rezultat, a treia.

Cum se poate stabili întreg produsul, cunoscându-se această unică cifră? Să admitem că cifra care s-a păstrat este 5. Care este produsul?

132. Ghicirea diferenței

Fără să-mi arătați, scrieți un număr de trei cifre, diferite la extremități (să presupunem 621), şi formați un alt număr din aceleaşi cifre, dispuse însă în ordine inversă (pentru exemplul dat - 126). Calculați diferența lor, scăzând numărul mai mic din cel mare (621 - 126 = 495) şi comunicați-mi ultima cifră a diferenței (5), iar eu vă voi spune rezultatul întreg.

Cum procedez?

133. Stabilirea vârstei

Dacă inversați cifrele vârstei lui *A,* obțineți vârsta lui *B.* Diferența între vârsta lui *A* şi *B* dă vârsta îndoită a lui *C*, iar *B* este de 10 ori mai în vârstă decât *C*. Care este vârsta fiecăruia?

134. Care-i secretul?

Unul dintre prietenii mei a declarat într-o societate că este în stare, fără să se gândească prea mult, să scrie oricâte numere formate dintr-un număr fără soț de cifre, şi fiecare din ele va avea următoarea însuşire uimitoare: dacă se adună toate cifrele numărului scris, apoi se adună toate cifrele sumei obținute şi aşa mai departe, până când suma cifrelor va fi reprezentată printr-o singură cifră, atunci această cifră va fi identică cu cifra aflată exact în mijlocul numărului inițial. El ne-a dat o sumedenie de exemple de asemenea numere. Printre ele erau unele cu trei cifre, de pildă 435, altele cu cinci cifre 46.853, şi chiar cu 13 cifre, de exemplu 1.207.941.800.554. El a scris şi numere care conțineau cifre indicate de noi... Şi toate aveau proprietatea pe care o enunțase.

Să verificam chiar numerele date ca exemplu. Avem:

4 + 3 + 5 = 12; 1 + 2 = 3; 4 + 6 + 8 + 5 + 3 = 26; 2 + 6 = 8;

1 + 2 + 7 + 9 + 4 + 1 + 8 + 5 + 5 + 4 = 46; 4 + 6= 10; 1 + 0 = 1.

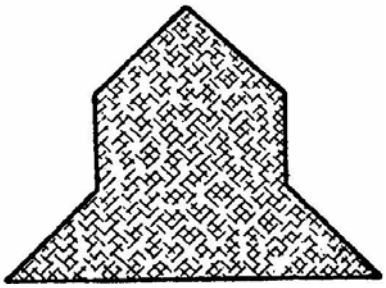
După cum vedeți, suma finală a cifrelor indică de fiecare dată cifra de la mijiocul numărului. „Talentul" original al prietenului meu ne-a produs o impresie puternică. Era limpede că nu putuse memora un număr atât de mare de numere! Am încercat şi noi să scriem la noroc numere similare, dar foarte rar s-a întâmplat să aibă însuşirea de mai sus.

Care este secretul numerelor scrise de prietenul meu?

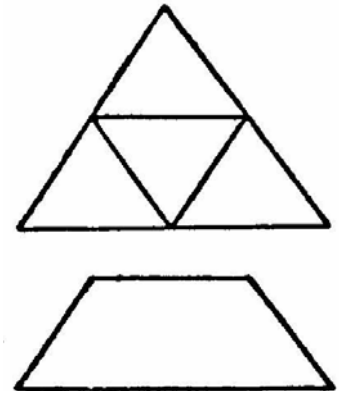
Capitolul 3 Măsoară de mai multe ori şi taie o dată

135. În părți egale

Problema 1. Copiați pe o coală de hârtie poligonul de mai jos şi tăiați-l în 4 patrulatere egale (figurile se numesc egale dacă se suprapun exact).

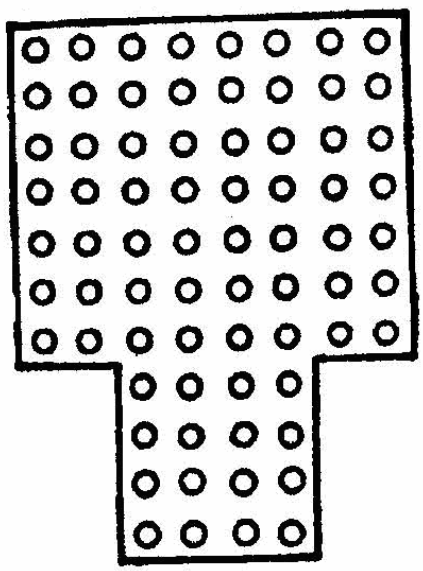


Problema 2. În figura următoare se poate vedea cum trebuie secționat un triunghi echilateral în patru părți egale.

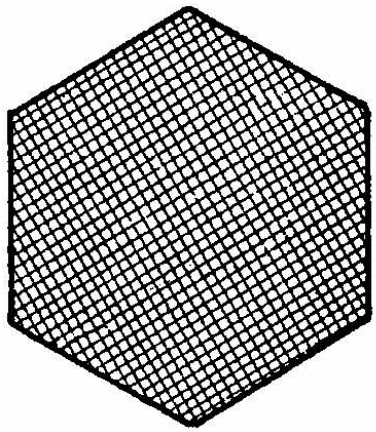


Înlăturați triunghiul de sus. Restul de 3 triunghiuri formează un trapez. Încercați să-l secționați şi pe acesta în patru părți egale.

Problema 3. Tăiați placa de mai jos în şase părți egale.

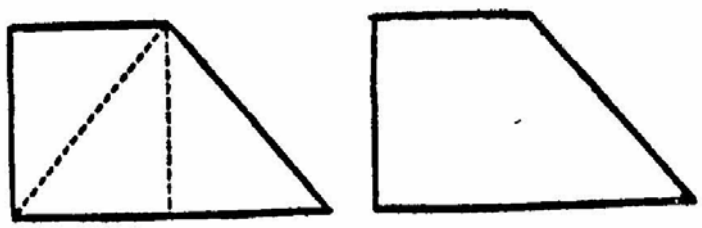


Problema 4. Dacă un poligon are toate unghiurile şi toate laturile egale între ele, zicem că este *un poligon regulat.* Secționați poligonul regulat de mai jos în 12 patrulatere egale.



Vor fi oare acestea patrulatere regulate, adică vor fi pătrate?

Problema 5. Nu orice trapez poate fi secționat în 3-4 trapeze mai mici, egale între ele. Nu-i aşa?



Trapezul format din 3 triunghiuri dreptunghiuri isoscele egale - care în secțiune longitudinală seamănă cu un ciocan de lemn fără mâner - poate fi însă uşor secționat în 4 trapeze dreptunghiulare, perfect identice.

136. 7 trandafiri pe un tort

Pentru ceai a fost cumpărat un tort. El a fost tăiat prin 3 linii drepte în 7 părți, cuprinzând fiecare câte un trandafir. Cum a fost tăiat tortul?



137. Figuri care şi-au pierdut conturul

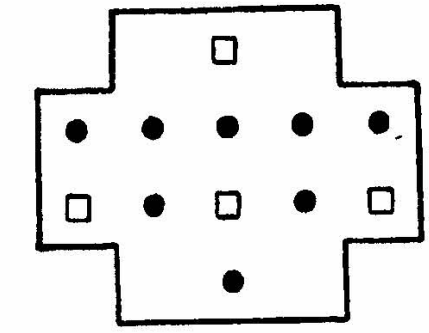
Pătratul în căsuțele căruia vedeți câteva cifre, a fost pregătit pentru a fi tăiat în 4 figuri egale. Aceste figuri erau dispuse simetric în raport cu centrul pătratului. Mai mult decât atât, pentru a face să coincidă oricare din figuri cu alta, ar fost suficient să fie rotită exact cu 90° în jurul centrului pătratului, ca în jurul unei axe. Din nefericire, cineva a şters liniile după care urma să se facă secționarea. Cifrele s-au păstrat însă, şi îmi amintesc că ele erau dispuse în felul următor: fiecare

cifră apărea o singură dată în fiecare figură. Cred că datele de mai sus vă sunt suficiente pentru a reda figurilor conturul pierdut, ştiind că liniile de secționare treceau numai de-a lungul laturilor pătrățelelor din pătrat.

			3		1	1	
			3	4			
				2			
	1		4	2			
	1						
		3	3				
					4	2	2
					4		

138. Se cere un sfat

Figura următoare reprezintă planul părții inferioare a unui aparat. Sfătuiți-mă cum trebuie să împart aparatul în patru sectoare, egale ca formă şi dimensiuni, astfel ca fiecare sector să cuprindă câte doua ştifturi (notate prin puncte negre) şi câte un orificiu (însemnate prin pătrate mici).



139. Când fasciştii au cotropit pământul Uniunii Sovietice

În acele timpuri, în oraşele situate în apropierea frontului camuflajul era obligatoriu. într-o locuință nu s-au găsit storurile necesare pentru a camufla o fereastră pătrată cu dimensiunile 120 x 120 cm^2. Locatarii nu aveau nimic la îndemână, în afară de o foaie dreptunghiulară de placaj, a cărei suprafață era egală cu suprafața ferestrei, însă cu alte dimensiuni: 90 x 160 cm^2.

Toată lumea era descumpănită, dar Boris nu s-a pierdut cu firea: înarmându-se cu o riglă, a trasat cu repeziciune câteva linii pe foaia dreptunghiulară de placaj, după care a tăiat foaia de placaj doar în două părți, din care a alcătuit un panou pătrat de dimensiunile necesare pentru camuflarea ferestrei.

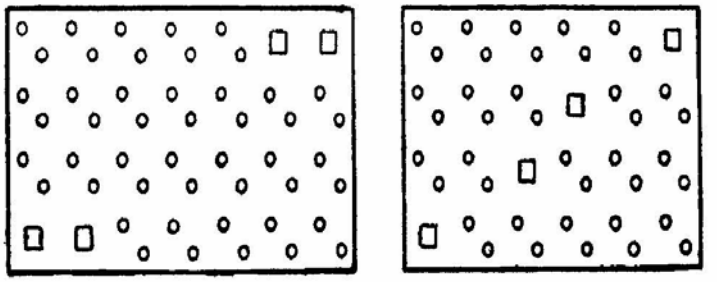
Cum a rezolvat Boris problema?

140. Amintirile unui electrician

În fiecare locuință luminată electric exista un tablou (de marmură) cu două sau mai multe „dopuri" de siguranță. De obicei, tablourile au forma dreptunghiulară sau pătrată. Pentru a economisi marmura, electricienii îşi permiteau uneori să nu respecte formele stabilite. îmi amintesc că am avut două plăci mari de marmură, cu orificii în formă de cerculete şi pătrate. Trebuia să tăiem aceste două plăci în 8 tablouri mai mici.

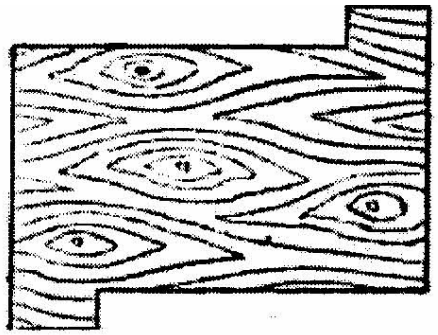
Şeful nostru de echipă le-a măsurat în toate felurile şi în cele din urmă îşi dădu seama că prima placă poate fi tăiată în 4 tablouri egale, cuprinând fiecare câte un orificiu pătrat şi 12 orificii circulare. A doua placă putea fi de asemenea secționată în 4 tablouri egale între ele, de astă dată cuprinzând fiecare câte un orificiu pătrat şi 10 orificii circulare. Aşa am şi procedat.

Cum au fost tăiate tablourile?



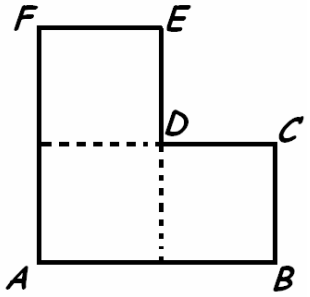
141. Nimic nu se pierde

„Va ieşi oare din această placă o tablă de şah cu 64 de căsuțe?" mă întrebam eu privind bucata dreptunghiulară de scândură de nuc, cu două ieşituri în formă de dreptunghi. Măsurând scândura, am calculat că ea poate fi folosita în întregime, fără să arunc nimic. Apoi am împărțit-o în 64 de căsuțe egale - trebuie să vă spun că fiecare ieşitură cuprindea câte două căsuțe şi am tăiat scândura numai în două părți, egale atât ca formă, cât şi ca mărime, şi lipindu-le am confecționat o tablă de şah. Puteți să-mi indicați linia de secționare?



142. Şarada

Figura ABCDEF este alcătuită din 3 pătrate egale. Se cere să se secționeze această figură în două părți, în aşa fel ca din ele să se poată alcătui o ramă pătrată. Orificiul rămas în interiorul ramei trebuie să aibă de asemenea o formă pătrată, egală cu oricare din cele trei pătrate care formează figura dată.

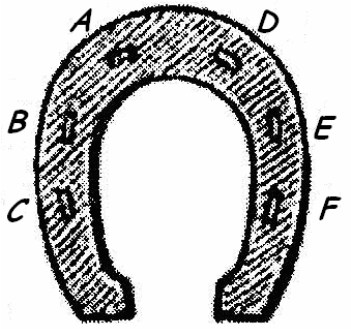


143. Tăierea potcoavei

Desenați o potcoavă şi trasați două linii drepte, de-a lungul cărora potcoava să poată fi tăiată în 6 părți. Nu se admite deplasarea părților în timpul tăierii.

144. În fiecare parte este un orificiu

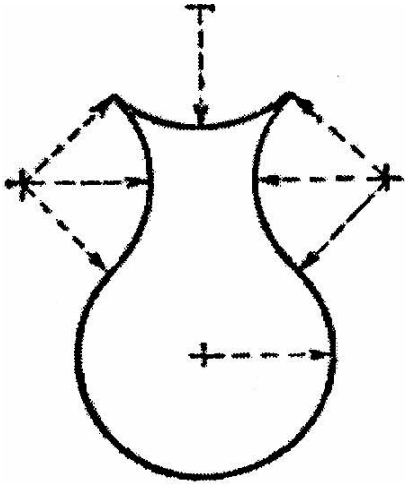
Iată o potcoavă cu găuri pentru caiele.



Tăiați-o cu ajutorul a 2 drepte în 6 părți, în aşa fel ca în fiecare parte să fie câte o gaură.

145. Dintr-un „urcior" un pătrat

Copiați pe o coală de hârtie figura în formă de urcior şi secționați-o cu ajutorul a două tăieturi în linie dreaptă, în trei părți din care să se poată alcătui un pătrat.



146. Pătrat din litera „E”

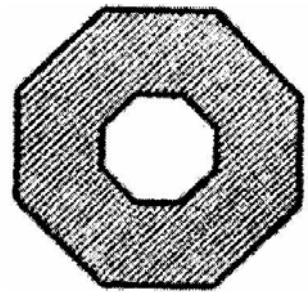
Desenați cu atenție pe o coală de hârtie figura care are conturul literei E. Se cere să o secționați însă 7 părți cu ajutorul a 4 *tăieturi* în linie dreaptă, în aşa fel ca din părțile obținute să puteți alcătui un pătrat.

Observație. Fiecare unghi are 45°, iar fiecare unghi obtuz este de 3 ori mai mare decât cel ascuțit. Corelația dintre lungimea laturilor poate fi uşor stabilită după desen.



147. O transformare frumoasă

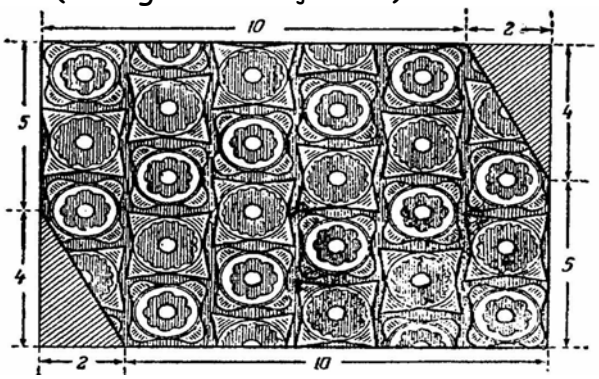
Copiați pe o bucată subțire de carton sau pe o coală groasă de hârtie octogonul regulat din figura următoare şi decupați în centru un orificiu care să aibă tot forma unui octogon regulat.



Această figură trebuie tăiată în 8 părți egale, din care să puteți forma o stea în opt colțuri, care să aibă de asemenea un orificiu octogonal.

148. Restaurarea covorului

Dintr-un covor vechi, dar valoros, au trebuit îndepărtate două mici bucățele triunghiulare deteriorate (triunghiurile haşurate).

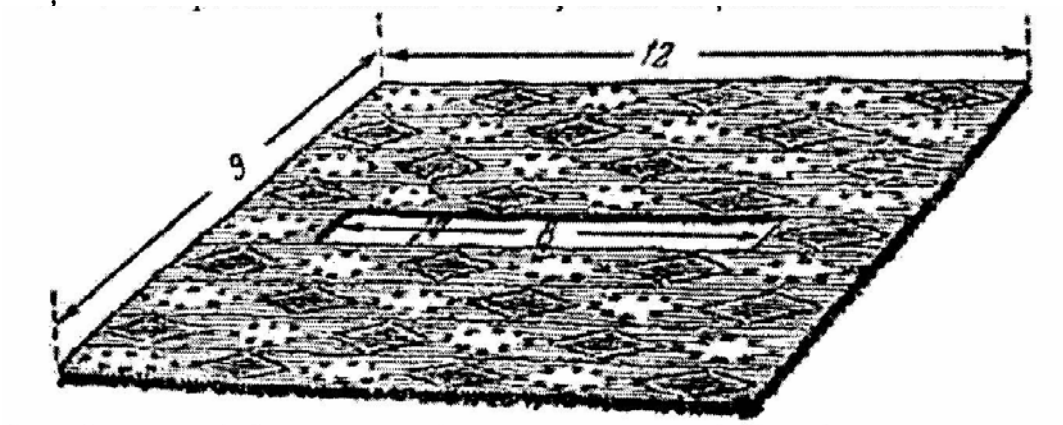


Elevii unei şcoli de artizanat au hotărât să-i redea covorului forma dreptunghiulară, păstrându-i desenul şi fără să mai piardă nici o bucăţică. Ei l-au tăiat în două părţi, din care au format noul dreptunghi (care s-a dovedit a fi pătrat). Totodată n-a fost nevoie să se modifice câtuşi de puţin desenul covorului.

Cum au făcut ei?

149. O recompensă valoroasă

Nuria, încă adolescentă, a fost una din primele culegătoare din satul său care a început să folosească - asemenea renumitei Mamleakat - o metodă perfecţionată de recoltare a bumbacului. Drept recompensă Nuria a primit un frumos covoraş lucrat de ţesătoare turkmene.



Nuria ţinea foarte mult la această prima recompensă primită. Acum ea a crescut şi lucrează ca agronom în satul său natal. Covoraşul se găseşte în laboratorul ei. într-o zi, făcând nişte experienţe, Nuria a vărsat un acid pe covoraş şi l-a ars chiar în mijloc. Partea deteriorată a trebuit să fie tăiată şi în mijloc a rămas o gaură dreptunghiulară cu dimensiunile de 1 x 8 dm. Nuria însă nu l-a aruncat. Ea a tăiat cu multă iscusinţă covoraşul în două părţi, astfel încât, unite ele au format un pătrat. Cusăturile erau invizibile, aşa că ea a avut din nou un covoraş frumos.

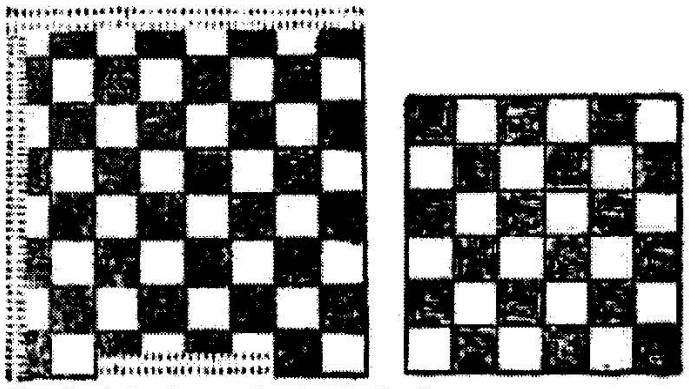
Cum a procedat ea?

150. Un dar pentru bunica

O fetiţă avea două bucăţi pătrate de stofă în carouri: una cu 64 de carouri şi alta cu 36 de carouri. Fetiţa s-a hotărât să le coasă la un loc în formă de şal pătrat, pe care să-1 dea în dar bunicii sale. Fireşte că trebuia să păstreze riguros alternanţa pătrăţelelor albe şi negre.

Problema s-a complicat prin faptul că marginile bucăţii mai mari de ţesătură fuseseră deja tighelite, ba chiar şi franjurile fuseseră prinse pe două laturi în întregime, iar pe a treia - numai pe jumătate.

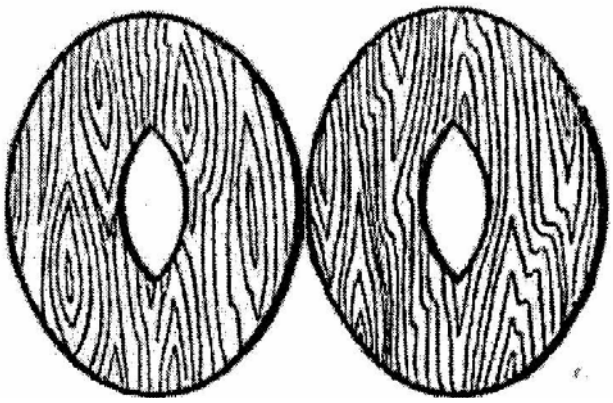
Iscusinţa de constructor a scos-o însă din încurcătură pe fetiţă. Ea a tăiat cu atâta ingeniozitate fiecare cupon în două părţi, încât şalul reconstituit din cele 4 bucăţi avea toate 100 de carouri şi, pe deasupra, toate franjurile prinse de bucata mare au rămas pe dinafară, pe marginile şalului.



Căutați, folosind modele de hârtie, soluția fetiței.

151. Problema tâmplarului

Unui tâmplar i s-au adus două scânduri ovale identice, prevăzute cu orificii lunguiețe în centru, şi i s-a comandat să confecționeze din ele o tăblie rotundă şi compactă pentru masă. Scândurile erau dintr-un lemn rar şi scump şi meşterul voia să le folosească în întregime, fără să piardă vreo bucățică. Pentru a nu face tăieturi nechibzuite, tâmplarul a croit la început din hârtie groasă tiparul scândurii, i-a cercetat forma şi a verificat unele date cu compasul. S-a dovedit că intenția meşterului era perfect realizabilă şi necesita efectuarea unui mic număr de tăieturi la fiecare scândură. Cum a tăiat tâmplarul scândurile?

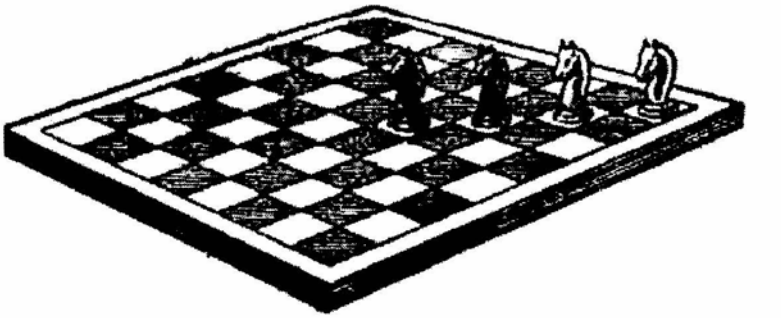


152. Şi blănarul foloseşte geometria!

Un blănar trebuia să aplice pe o blană un petic în formă de triunghi scalen. El a croit peticul din aceeaşi blană, dar... a greşit. Peticul nu se potrivea la ruptură decât întors pe dos. Ce ghinion! Ce era de făcut, ca să nu arunce peticul croit din blana scumpă? Cum să-l întoarcă pe față şi să păstreze totodată forma triunghiulară necesară. Blănarul s-a gândit mult timp şi în cele din urmă a găsit soluția. El şi-a dat seama că bucata trebuia tăiata într-un anumit fel: în câteva părți care, întoarse pe față, acopereau perfect ruptura din blană. Cum a tăiat el peticul?

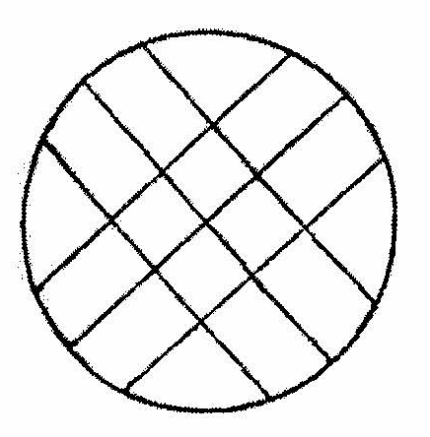
153. Pentru fiecare cal câte un grajd

În figura de mai jos este desenată o tablă de şah cu 4 cai. Se cere să se taie tabla în 4 părți egale şi identice ca formă, astfel ca pe fiecare din ele să rămână câte un cal.



154. Şi mai mult!

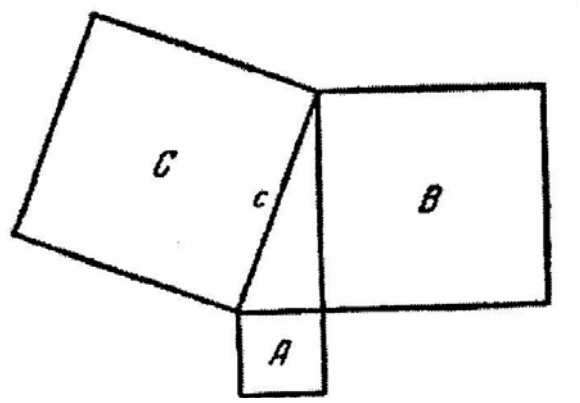
Încercați să secționați un cerc cu ajutorul a 6 linii drepte în cel mai mare număr posibil de părți.



De exemplu, cercul de mai sus este secționat în 16 părți, dar acestea nu reprezintă o limită. La rezolvare încercați să realizați o simetrie în dispoziția dreptelor secante.

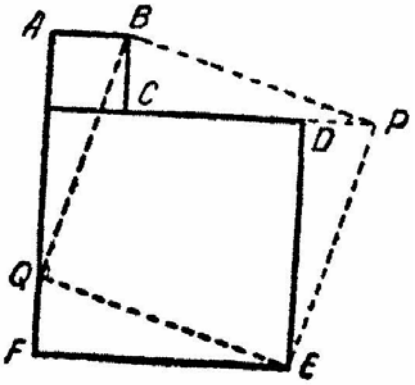
155. Transformarea unui poligon într-un pătrat

Este oare posibilă transformarea a două pătrate oarecare într-unui singur? Cu alte cuvinte, dacă voi desena două pătrate veți găsi metoda de a le tăia în părți din care să se poată alcătui *un pătrat?*

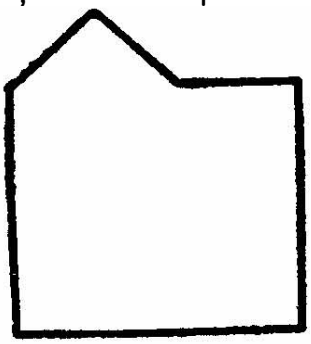


Prima soluție generală a acestei probleme este atribuită savantului grec din antichitate Pitagora (sec. VI î.e.n.), dar problemele transformării unei figuri în alta i-au preocupat şi pe matematicienii hinduşi (în legătură cu dezvoltarea artei construcțiilor în India Antică), cu un mileniu sau un mileniu şi jumătate înaintea lui Pitagora.

E interesant ca având două pătrate să ne putem reprezenta dinainte un al treilea pătrat, în care să se cuprindă primele două. Pentru aceasta aşezaţi astfel pătratele date A şi B încât două din laturile unuia să servească în prelungire celuilalt şi reuniţi prin segmentul de dreaptă c două vârfuri, aşa cum se arată în figură. Se va forma un triunghi dreptunghic. Dacă vom construi acum un pătrat C pe latura c (pe ipotenuză) a triunghiului dreptunghic format, el va reprezenta pătratul care poate fi alcătuit din părţile primelor două pătrate. Cum trebuie însă tăiate pătratele date? În răstimpul a două milenii şi jumătate, care ne despart de Pitagora, s-au descoperit foarte multe metode practice de rezolvare a acestei probleme. Iată una din ele, elegantă şi frumoasă. Aşezăm pătratele date sub forma figurii ABCDEF.



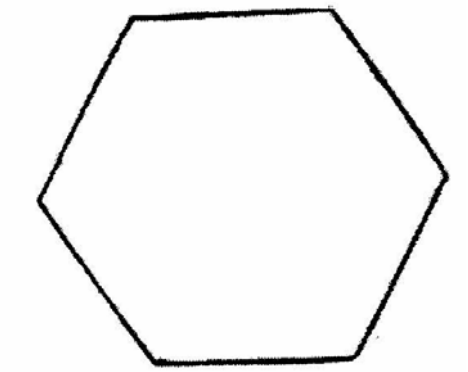
Luăm pe latura AF segmentul FQ = AB şi tăiem figura pe dreptele EQ şi BQ. Transpunem Δ BAQ în poziţia Δ BCP, iar Δ EFQ în poziţia EDP; se formează pătratul EQBP, care conţine toate părţile celor două pătrate date. Latura lui este egală cu ipotenuza EQ a Δ dr. EFQ, iar laturile celor 2 pătrate date sunt egale cu catetele EF şi FQ. Cititorul care cunoaşte puţină geometrie, de pildă un elev din clasa a VII-a, va demonstra cu uşurinţă egalitatea dintre Δ BAQ, BCP, EFQ şi EDP precum şi faptul că EQBP este un pătrat. Aceasta va fi o demonstraţie nouă, în comparaţie cu cea şcolară, a teoremei lui Pitagora. Acum copiaţi pe hârtie figura următoare, rezultată din îmbinarea unui pătrat cu un triunghi dreptunghic isoscel, tăiaţi-o numai în 3 părţi şi alcătuiţi din ele un pătrat.



156. Transformarea unui hexagon regulat într-un triunghi echilateral

Probleme geometrice privind alcătuirea unei anumite figuri din părţile unei alte figuri îi pasionează de câteva milenii atât pe matematicieni şi arhitecţi, cât şi pe amatorii de matematică. Există reguli generale de transformare a unei figuri în alta

prin tăierea şi translarea părților figurii date. Practic însă, în multe cazuri, folosirea procedeelor generale este extrem de incomodă şi greoaie.



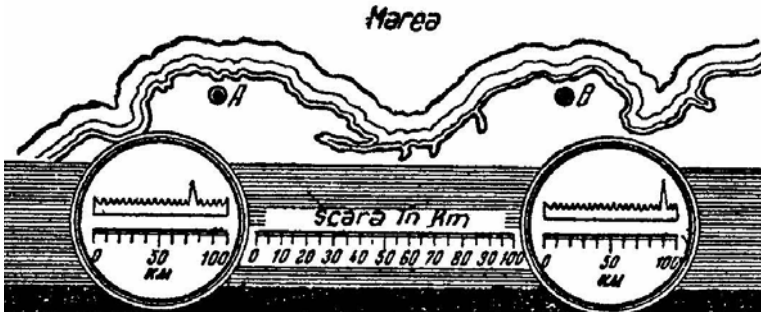
În asemenea probleme e interesant de aflat procedeul de secționare a figurii date într-un număr cât mai mic de părți. Acest lucru însă nu este uşor şi necesită multă răbdare şi ingeniozitate.

Cum poate fi tăiat prin tăieturi rectilinii şi în modul cel mai reuşit, de pildă, un hexagon regulat, în aşa fel încât din părțile lui să se poată alcătui un triunghi regulat (adică echilateral). Problema are mai multe soluții; în cadrul fiecăreia din ele hexagonul este împărțit numai în 6 părți, încercați să le găsiți! Trebuie precizat că până în prezent nimeni nu a reuşit să taie hexagonul în 5 părți din care să se poată alcătui un triunghi regulat, dar nici imposibilitatea unei asemenea secționări nu a fost demonstrată.

Capitolul 4 Iscusința își găsește pretutindeni folosința

157. Unde se află obiectivul

În figura de mai jos sunt desenate în cercuri ecranele unor stații de radiolocație. Pe ecrane apare o linie frântă luminoasă; sub ea se află indicatorul de distanță. De la stații se emite o undă radiofonică. Pe ecran acest moment corespunde cu punctul 0 al scalei.



Peste câtva timp unda radiofonică se reîntoarce de la obiectiv (de pildă de la vaporul aflat în largul mării) la stație. în acest moment linia frântă de pe ecran face un salt în sus. în timpul care s-a scurs, unda radiofonică a străbătut de două ori distanța dintre stație şi obiectiv (dus şi întors).

Indicatorul de distanță este însă astfel dimensionat, încât cifra corespunzătoare indică distanța de la stație până la obiectiv. Ecranul din stânga arată datele înregistrate de stația de radiolocație de pe litoral, aflată în punctul A. Ecranul din dreapta arată datele înregistrate de stația de radiolocație aflată în punctul B, admitem că ambele stații au descoperit simultan un obiectiv pe mare şi datele înregistrate pe ecranele lor sunt cele arătate în figură.

Citiți indicatoarele de distanță şi precizați în ce punct se află obiectivul.

158. 5 minute pentru gândire

Imaginați-vă un cub de lemn cu latura de 3 dm, vopsit tot în culoare neagră. Se întreabă:

1. Câte tăieturi sunt necesare pentru a împărți cubul în cuburi mai mici, cu latura de 1 dm?
2. Câte cuburi de acest fel se vor obține?
3. Câte cuburi vor avea 4 fețe vopsite în negru?
4. Câte cuburi vor avea 3 fețe vopsite în negru?
5. Câte cuburi vor avea 2 fețe vopsite în negru?
6. Câte cuburi vor avea 1 față vopsită în negru?
7. Câte cuburi vor fi nevopsite?

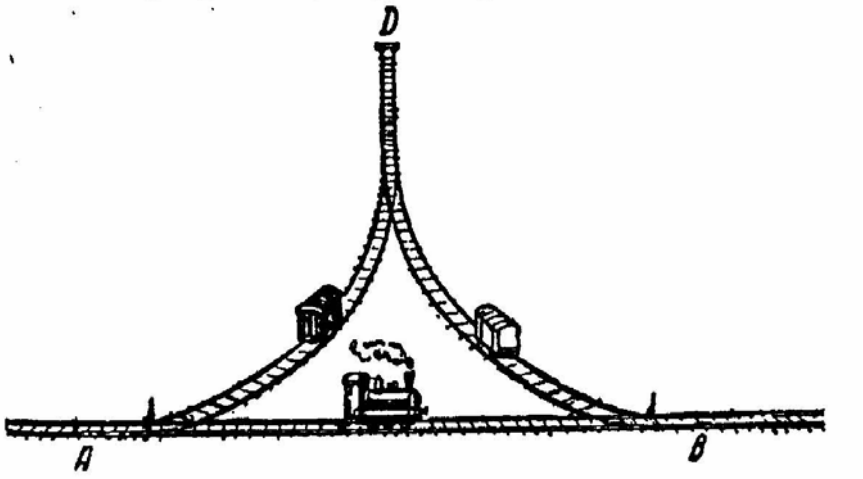
159. O întâlnire neprevăzută

Două trenuri, alcătuite fiecare din câte 80 de vagoane, s-au întâlnit pe o cale ferată cu o singură linie, din care se ramifică o scurtă linie moartă.

Cum îşi poate urma fiecare tren drumul, dacă pe linia moartă nu încape decât o locomotivă şi cel mult 40 de vagoane?

160. Un triunghi de cale ferată

Linia principală de cale ferată AB şi două linii moarte scurte AD şi BD formează un triunghi de cale ferată. Dacă pe linia principală AB se află o locomotivă cu coşul spre dreapta, străbătând triunghiul de cale ferată ea va ajunge cu coşul spre stânga.



Privind figura este uşor să ne închipuim cum trebuie să meargă locomotiva pentru a se întoarce cu coşul spre stânga (să presupunem că pe liniile moarte nu sunt vagoane). Acum însă mecanicul locomotivei este preocupat de altă problemă. El trebuie să mute, unul în locul ceiluilalt, vagoanele aflate pe liniile moarte AD şi BD; vagonul alb de pe linia BD pe inia AD, iar cel roşu - de pe AD pe BD; la sfârşit locomotiva trebuie să revină în poziția inițială. Pe linia moartă secundară D, dincolo de ac, încape numai locomotiva sau un vagon.

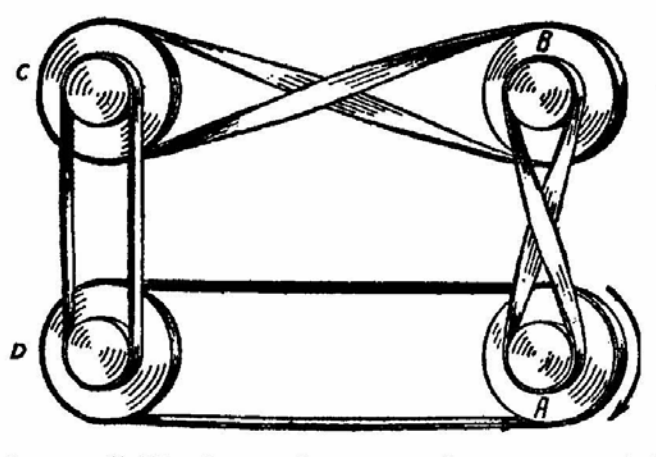
Cum a rezolvat mecanicul această problemă? Dacă veți considera fiecare cuplare şi decuplare drept manevră, vă putem spune că mecanicul a rezolvat problema în zece manevre. Dumneavoastră o puteți rezolva însă şi în 6 manevre.

161. Încercați să cântăriți

Un pachet conține 9 kg de cartofi. încercați, cu ajutorul unui cântar cu talere, care are numai 2 greutăți - una de 50 şi alta de 200 gr - să împărțiți întreaga cantitate de cartofi în 2 pachete: unul de 2 kg, iar celălalt de 7 kg. Se admit numai 3 cântăriri.

162. Transmisia

Roțile de transmisie A,B,C şi D sunt unite prin curele de transmisie, aşa cum se arată mai jos.



Se întreabă: 1) în condițiile date, mişcarea celor 4 roți de transmisie este posibilă?

2) în ce direcție se va roti fiecare roată în cazul când roata A se roteşte în direcția indicată de săgeată?

3) este oare posibilă mişcarea roților, dacă toate cele patru curele vor fi încrucişate ca pe roțile A şi B?

4) dar dacă vor fi încrucişate numai una sau 3 curele?

163. 7 triunghiuri

Unind capetele a 3 chibrituri cu bile de plastilină, e uşor să se alcătuiască un triunghi echilateral. Luați acum 9 chibrituri şi îmbinați-le la capete, astfel ca să formați 7 triunghiuri echilaterale.

164. Pânzele pictorului

Un pictor plin de ciudățenii m-a asigurat că, pentru tablourile sale, cele mai potrivite dimensiuni de pânze sunt cele care au suprafața numeric egală cu perimetrul. Nu ne interesează dacă într-adevăr aceste dimensiuni ale pânzelor contribuie la o mai bună realizare a tablourilor; în schimb vom încerca să stabilim ce dimensiuni (numai în numere întregi) trebuie să aibă dreptunghiul, pentru ca suprafața şi perimetrul lui să fie exprimate prin acelaşi număr. Nu este o problemă prea uşoară şi cu toate acestea o elevă din clasa a VI-a din oraşul Dzaudjikau a găsit o soluție extrem de subtilă. Ea a demonstrat totodată că nu se pot construi decât două dreptunghiuri care satisfac condițiile problemei.

Să vedem care din voi va descoperi soluția elevei sau va găsi o soluție la fel de ingenioasă a acestei probleme?

165. Cât cântăreşte sticla

Pe talerul din stânga a unui cântar se găseşte o sticlă cu un pahar, pe cel din dreapta - o cană. Cântarul se află în echilibru. Să mutăm paharul de pe talerul din stânga al cântarului pe cel din dreapta şi să înlocuim cana cu o farfurie. Cântarul se află din nou în stare de echilibru. Luăm sticla de pe talerul din stânga al cântarului şi punem aici 2 căni identice, iar pe cel din dreapta înlocuim paharul cu 2 farfurii identice. Cu această ocazie rezultă că două căni cântăresc cât 3 farfurii.

De câte ori este sticla mai grea decât paharul?

166. Cuburile

Unui meşter care confecționează jucării pentru copii i s-au dat mai multe cuburi de lemn de dimensiuni egale, spre a lipi pe ele literele şi cifrele necesare pentru joc. Suprafața totală a fațetelor exterioare ale tuturor cuburilor s-a dovedit însă insuficientă. El avea nevoie de o suprafață de două ori mai mare. Cum a dublat meşterul suma suprafețelor fațetelor cuburilor, fără să adauge cuburi noi?

167. Borcanul cu alice

Într-o zi, pe şantierul unui canal de irigație, am avut urgentă nevoie să confecționăm o placă de plumb cu anumite dimensiuni. în atelierul mobil nu se găsea plumb. Atunci am hotărât să topim nişte alice de vânătoare. Aveam cu noi un borcan de jumătate de litru, gradat. Am răsturnat alicele, umplând borcanul. Puteam obține oare din aceste alice o placă cu dimenunile necesare? Plumbul doar nu e apă; nu-i poți măsura uşor volumul. Cum să determinăm volumul alicelor?

Cineva a propus să determinăm volumul unei alice după formula sferei şi să numărăm alicele. Procedeul era complicat şi necesita mult timp, mai ales că alicele erau de dimensiuni diferite. Dacă obiectul este omogen (dintr-un singur material), atunci volumul poate fi determinat prin împărțirea greutății lui la greutatea specifică a materialului din are este confecționat. Dar, ca un făcut, nimeni n-a putut să-şi aducă aminte care este greutatea specifică a plumbului.

Cu toate acestea am determinat repede şi destul de exact volumul alicelor; totodată calculele noastre s-au rezumat la o singură operație - scăderea.

Cum am procedat?

168. Unde a ajuns sergentul?

Executând ordinul comandantului său, un sergent a pornit din localitatea M pe azimutul 330°. Ajungând la un dâmb, el a pornit pe azimutul 30° şi a ajuns până la un copac izolat. De aici a cotit spre dreapta cu 60°. Ajuns în dreptul unui pod, sergentul a mers de-a lungul râului pe azimutul 150°. Peste o jumătate de oră a dat de o moară şi a schimbat din nou direcția. De data aceasta a plecat pe azimutul 210°, îndreptându-se spre casa morarului. De la casa morarului a cotit din nou spre dreapta şi, mergând pe azimutul 270°, a ajuns exact la locul unde i se ordonase.

Folosind raportorul, reconstituiți în carnetul vostru ruta sergentului şi stabiliți unde a ajuns el, ştiind că pe fiecare azimut a mers 2,5 km?

169. Să se determine diametrul buşteanului

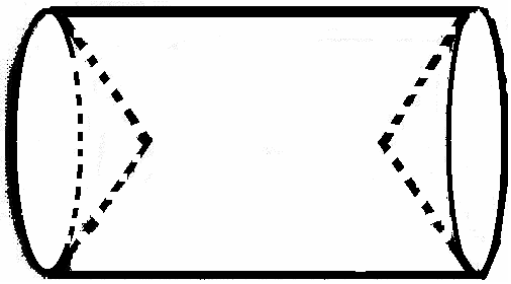
Care este aproximativ diametrul unui buştean din al cărui strat exterior s-a confecționat o foaie de placaj cu dimensiunile de 150 x 150 cm^2.

Reamintim că diametrul **d** al circumferinței se calculează aproximativ după următoarea formulă $d \approx \frac{c}{3,14}$, în care c reprezintă lungimea circumferinței, dar să

nu greşiți la rezolvarea problemei. Diametrul stratului exterior al buşteanului este $d \neq \frac{150}{3,14}$.

170. O dificultate neaşteptată

Într-o zi Ceapaev a fost întrebat dacă nu cumva succesele lui militare sunt întâmplătoare. Ceapaev a răspuns: „Câtuşi de puțin! întâmplarea nu are ce căuta aici - pretutindeni este minte... de ingeniozitate ..."



Într-adevăr, în orice domeniu de activitate nu ne putem bizui pe întâmplare, pe hazard. Fie că muncim, fie că jucăm, de pildă, şah - întotdeauna se pot ivi situații care par fără ieşire.

Ne scot din încurcătură numai perseverența şi iscusința... Un student trebuia să deseneze o piesă în formă de cilindru scobit la capete. În asemenea cazuri, pentru măsurarea adâncimii scobiturii se ataşează la şubler un dispozitiv special numit măsurător de adâncime.

Studentul nostru nu avea însă nici un fel de aparat de măsurare, în afară de un balustru şi o riglă gradată. Măsurând piesa cu ajutorul balustrului, studentul s-a ciocnit pe neaşteptate de următorul obstacol: pentru a determina distanța dintre punctele cele mai adânci ale scobiturilor, de-a lungul axei cilindrului, el trebuia să ridice balustrul de pe piesă şi să măsoare distanța dintre brațe cu ajutorul riglei gradate. în acest caz însă el era nevoit să desfacă brațele balustrului şi... să piardă dimensiunea căutată.

Ce era de făcut?

171. Povestirea unui elev de la o şcoală tehnică

În şcoala tehnică studiem construcția strungurilor şi a maşinilor, învățăm să folosim rațional instrumentele şi să ne păstrăm calmul în situații dificile. Fireşte că în aceste ocazii ne ajută foarte mult cunoştințele dobândite în şcoala medie. într-ozi, maistrul îmi întinde o sârmă şi mă întreabă:

- Cu ce se măsoară diametrul sârmei?

- Cu micrometrul, - răspund eu.

- Dar dacă se întâmplă să nu ai la îndemână micrometrul, cum îl masori?

N-am vrut să întreb pe nimeni; m-am gândit şi în cele din urmă am găsit soluția. îmi plac asemenea probleme! Ştiți cum am măsurat diametrul sârmei?

Altădată mi s-a întâmplat ceva şi mai interesant. Am primit sarcina să fac un orificiu rotund într-o tablă de fier, pentru acoperiă, cu o grosime de aproximativ 1,5 - 2 mm.

- Mă duc să aduc burghiul şi dalta. - îi spun maistrului.

- Nu-i nevoie, - răspunse maistrul, zâmbind şiret. Văd că ai un ciocan şi o pilă plată. Foloseşte-te numai - aceste instrumente. Recunosc că n-am reuşit să-mi dau seama singur cum trebuie să procedez. Ce trebuia să fac?

172. Se poate care realiza o economie de 100%?

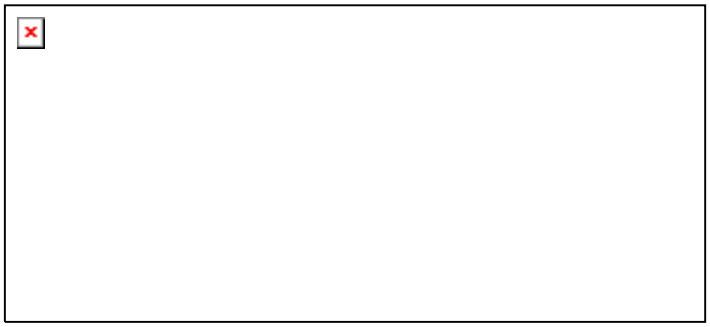
Cineva a aflat de trei invenții: cu ajutorul primei invenții se putea economisi 30% din combustibil, cu ajutorul celei de a doua - 45%, iar cu cea de a trei a - 25%. Acest om a hotărât să folosească toate cele trei invenții dintr-odată, propunându-şi să economisească 30% + 45% + 25% = 100% din combustibil. Dar aşa stau oare lucrurile? Câte procente de economie va realiza el în realitate?

173. Cântare cu arc

Avem câteva cântare cu arc. Greutatea maximă pentru cântarele cu arc este de 5 kg. Cum putem cântări, folosindu-ne numai de cântare cu arc, o bară a cărei greutate, apreciată din ochi, este de 15 - 20 kg?

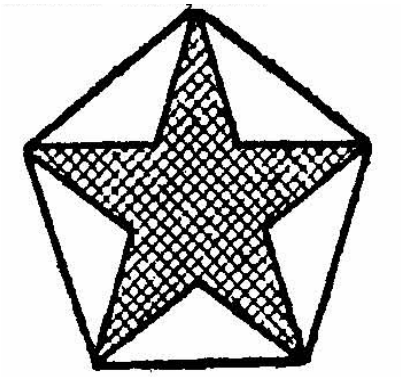
174. Eşecul lui Mihai

Iată ce a văzut Mihai. Fratele său mai mare, Victor, a luat un cub de lemn dintr-un joc şi l-a cioplit cu atâta iscusință, încât în secțiune s-a format un hexagon regulat.



Apoi a trasat cu creionul dreptele care uneau vârfurile hexagonului, din două în două, şi s-a format o stea cu şase colțuri. De pe suprafețele triunghiulare dintre razele steluței (triunghiurile nehaşurate), Victor a desprins cu un briceag un strat subțire de lemn, a lipit peste stea o foaie de cauciuc, a tăiat-o cu minuțiozitate după conturul steluței şi a spus: „Ştampila este gata".

Lui Mihai i-a plăcut pecetea şi s-a gândit că, în calitate de desenator al gazetei de perete din clasă sa, i-ar fi foarte utilă o asemenea ştampilă de stea, însă în cinci colțuri.



El ştia că o stea în cinci colțuri poate fi obținută, prin aceeaşi metodă dintr-un pentagon regulat în acest scop, Mihai a luat şi el un cub din jocul său şi a încercat să-l taie în aşa fel, încât să obțină în secțiune un pentagon regulat, dar... a dat greş. Oricât s-a străduit n-a reuşit printr-o singură secționare a cubului să obțină un pentagon regulat. Obținuse triunghiuri regulate de diferite dimensiuni, pătrate şi hexagoane regulate - de data aceasta de aceeaşi dimensiune - dar nici un pentagon. Mihai nu s-a lasăt: a tăiat toate cuburile din jocul său, dar în zadar. Eşecul se datora faptului că Mihai nu studiase suficient geometria şi deocamdată nu era înzestrat cu cunoştințele geometrice necesare. Trebuie să-l ajutăm pe Mihai să lămurească următoarele probleme:

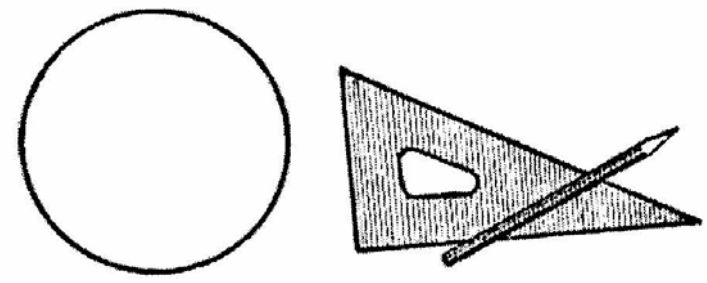
1. Este posibil ca secționând cubul cu un plan să obținem un pentagon regulat?

2. Cum trebuie tăiat cubul pentru ca în secțiune să se obțină un triunghi regulat sau un pentagon regulat?

3. E posibil ca prin secționarea cubului cu un plan să se obțină un poligon regulat, cu un număr de laturi mai mare de 6?

175. Să se găsească centrul cercului

Cum se poate găsi centrul unui cerc numai cu ajutorul unui echer negradat şi al unui creion?



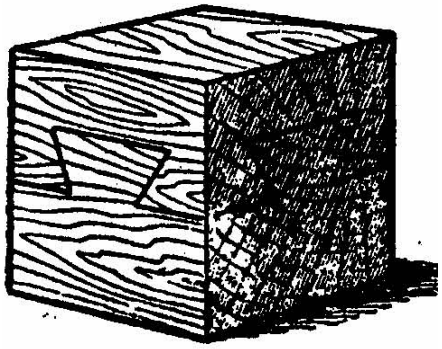
176. Care ladă este mai grea?

Două lăzi identice, în formă de cub, sunt umplute cu bile având o greutate specifică identică (adică, din acelaşi material). Prima ladă cuprinde 27 de bile identice mari, iar a doua 64 de bile identice rnici. Care dintre lăzi este mai grea? Se presupune că în ambele lăzi bilele sunt aşezate strâns una lângă alta, astfel încât fiecare strat are un număr identic de bile, iar bilele din rândurile marginale ating

pereții lăzii. Dacă lada se închide, atunci capacul va atinge şi el bilele din stratul superior.

177. Arta unui tâmplar

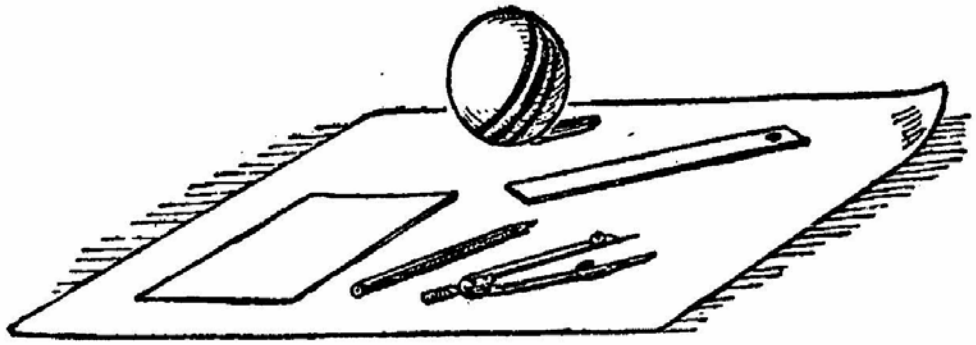
La expoziția lucrărilor executate de tinerii tâmplari ai şcolii ni s-a arătat un interesant cub de lemn. El era alcătuit din două părți unite etanş cu ajutorul unor cepuri, ale căror contururi puteau fi observate din cele 4 fețe lalerale ale cubului. Cele două părți nu sunt lipite şi, evident, trebuie să se desfacă fiecare. Dar cum?



Am încercat să le tragem în sus şi în jos, la stânga şi, la dreapta, înainte şi înapoi - fără succes. Poate reuşiți voi să stabiliți cum se desfac părțile cubului şi ce formă au ele?

178. Geometrie pe sferă

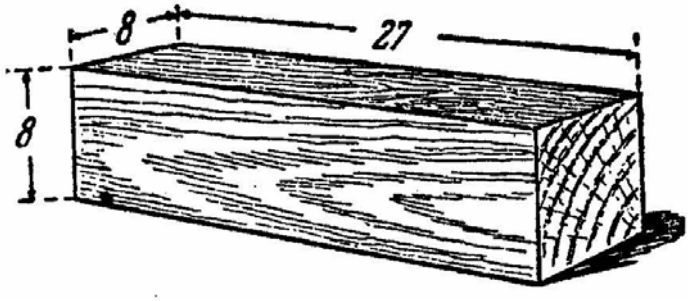
Toți cei care au studiat geometria au fost nevoiți, desigur, să rezolve probleme de construcție cu ajutorul compasului şi al riglei, adică să deseneze arcuri de cerc şi linii drepte. Cu acest prilej toate construcțiile necesare se efectuau de obicei pe hârtie sau pe tablă. E puțin probabil însă că ați avut prilejul să rezolvați o problemă de geometrie făcând construcții pe o suprafață curbă, să presupunem, pe suprafața unei sfere reale?



Dar, tocmai pe aceasta cale este posibil, de pildă, să se determine diametrul unei sfere numai cu ajutorul compasului şi al riglei.....Aşezați pe masă o bilă oarecare, de pildă, una de popice. Luați o coală de hârtie, un compas, o rigă negradată, un creion şi gândiți-vă cum se poate construi pe hârtie un segment egal cu diametrul sferei.

179. E nevoie de multă iscusință

O bucată de lemn (paralelipiped dreptunghic), cu muchiile de 8 cm, 8 cm şi 27 cm, trebuie tăiată cu un ferăstrău de traforaj în patru fragmente din care să se poată alcătui un cub.



Fireşte, este de dorit ca lemnul să nu fie tăiat la întâmplare, ci mai întâi să vă gândiți, să calculați şi să faceți o schiță. Aveți în vedere că problema necesită cunoştințe temeinice în domeniul geometriei în spațiu şi multă ingeniozitate.

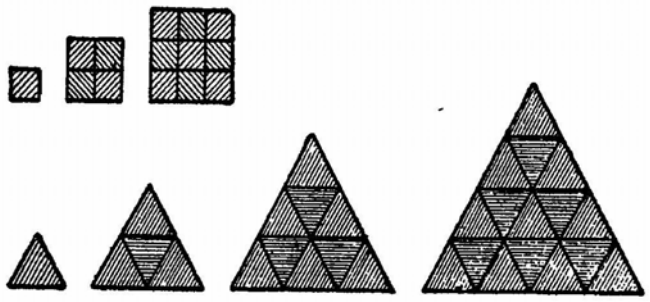
180. Condiții grele

Pentru a vă exersa iscusința, imaginați-vă următoarea situație: *folosindu-vă numai de o linie gradată,* trebuie să stabiliți volumul unei sticle (cu fund circular, pătrat sau dreptunghic, umplută parțial cu apă.

Fundul sticlei se presupune a fi plat. Nu se admite să se verse sau să se adauge apă. Grele condiții! Dar e cu atât mai mare satisfacția rezolvării.

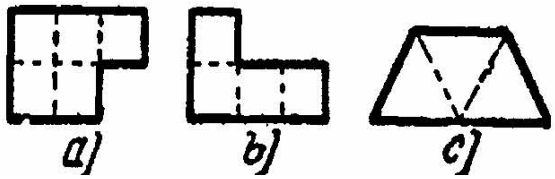
181. Poligoane asamblabile

Constructorii pot asambla astăzi o casă întreagă din piese (blocuri) prefabricate. De ce să nu încercăm şi noi să realizăm o construcție geometrică similară, ce-i drept cu diferența că la noi blocurile vor fi poligoane identice ca formă şi dimensiuni. Închipuiți-vă să aveți la dispoziție un număr nelimitat de poligoane egale. Se cere ca aşezând unul lângă altul câteva poligoane să se formeze un poligon de formă similară cu cea a poligoanelor date, dar cu dimensiuni mai mari. Pe scurt: să se formeze un poligon asemenea cu cele date. Se admite aşezarea poligoanelor în orice poziție, cu excepția ruperii sau îndoirii lor.



Nu orice poligon poate fi folosit în acest scop. Aşa, de pildă, hexagoanele regulate şi egale pot fi bine aşezate pe un plan (amintiți-vă de podelele din plăci de mozaic), dar nu este posibil să se alcătuiască din ele un hexagon regulat. Din pătrate egale sau triunghiuri echilaterale egale se pot alcătui însă cu uşurință figuri asemenea. Poligoanele de mai jos sunt foarte potrivite ca blocuri pentru construirea unor figuri asemenea. La fel de potrivite sunt şi alte poligoane similare formate din

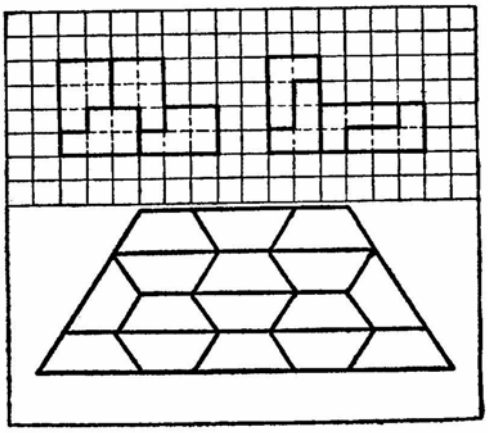
pătrate egale (de pildă, din pătrățelele unui caiet de aritmetică) sau din triunghiuri echilaterale egale. Poligoane asemenea cu cele din figura de mai jos pot fi alcătuite din 4, din 9, din 16 sau dintr-un număr şi mai mare de poligoane date.



În figura următoare se arată cum se pot forma figuri asemenea din 4 poligoane de tip ***a*** sau ***b***, sau din 16 poligoane de tip ***c***. Pentru a construi poligoane asemenea cu poligonul dat, sunt necesare după cum vedeți, minimum 4 poligoane identice, apoi 9, 16, în general $\mathbf{n^2}$ poligoane, în care **n** = orice număr întreg. Acest lucru este cât se poate de firesc. În cazul de față se confirmă practic cunoscută teorema din geometrie că ariile poligoanelor asemenea sunt proporționale cu pătratele dimensiunilor liniare corespunzătoare.

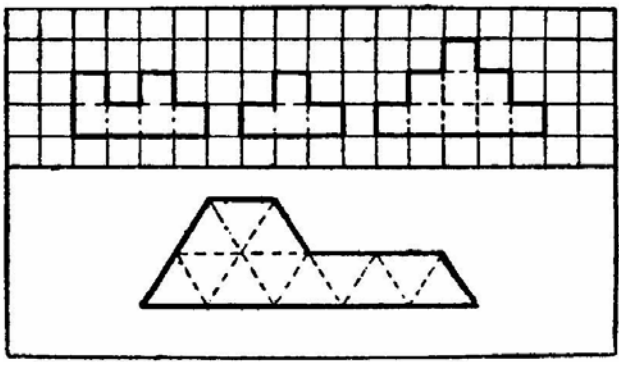
La alcătuirea unui poligon din mai multe poligoane egale şi asemenea cu el, ne putem aştepta ca lungimea laturilor lui să fie de 2, 3, 4,..., **n** ori mai mare decât lungimea laturilor poligonului dat. Atunci aria lui va fi de 2^2, 3^2, 4^2,..., $\mathbf{n^2}$ ori mai mare decât aria poligonului inițial; prin urmare, pentru construirea figurii cerute vor fi necesare 4 sau respectiv 9, 16..., **n** figuri inițiale.

Problemă. Alcătuiți poligoane asemenea cu cele din figura de mai sus : 1) din 9 figuri ***a;*** 2) din 9 figuri ***b;*** 3) din 4 figuri **c**; 4) din 16 figuri ***b;*** 5) din 9 figuri ***c.***



Pregătiți din hârtie (cu liniatură dreaptă şi oblică) alte blocuri similare celor din figura anterioară celei de mai sus (confecționați un număr cât mai mare) şi organizați o întrecere: cine alcătuieşte mai repede şi dintr-un număr mai mic de poligoane figuri asemenea.

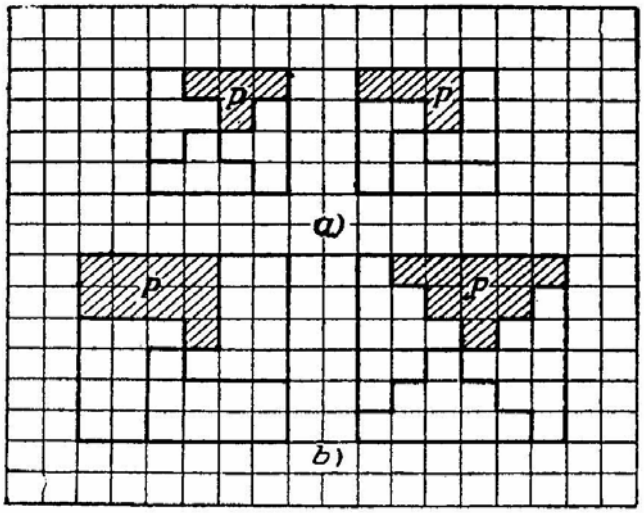
Aveți în vedere că nu orice poligon poate fi alcătuit din 4 sau 9 figuri asemenea cu el. Numărul minim de figuri necesare poate fi uneori 16, iar alteori 25 sau 36, în general $\mathbf{n^2}$, în care **n** = orice număr întreg. Acest număr nu este cunoscut dinainte. Tocmai de aceea este interesant cine va reuşi să folosească un număr mai mic de figuri date pentru alcătuirea poligonului. În figura următoare sunt arătate câteva blocuri care pot servi ca model. Puteți varia în fel şi chip forma lor, ținând minte însă că există blocuri din care nu se pot forma poligoane asemenea lor.



182. Un procedeu interesant pentru alcătuirea de figuri asemenea

Dacă renunțăm la condiția de a alcătui poligonul dintr-un număr cât mai mic de figuri asemenea cu el, atunci putem indica un procedeu interesant pentru rezolvarea acestor probleme, bazat pe folosirea de linii frânte de aceeaşi formă. Luăm o coală de hârtie liniată în pătrățele şi denumim fiecare căsuță pătrat-unitate. Ca poligon dat alegem pentru început unul ce poate fi alcătuit din pătrate unitate. însemnăm fiecare poligon de acest fel cu litera P, iar poligonul asemenea ce urmează a fi construit cu litera P'. Mai întâi construim un pătrat care să cuprindă un număr oarecare de pătrate-unități. Bineînțeles, acest număr va fi un multiplu al lui patru (4n).

Din centrul acestui pătrat ducem, de-a lungul laturilor pătratelor - unități, o linie frântă spre una din laturile sale, apoi, din acelaşi punct central şi în unghi drept față de prima linie frântă, ducem altă linie frântă, cu aceeaşi configurație ca şi prima. Din acelaşi punct central, de astă dată în unghi drept față de a doua linie frântă, ducem o a treia linie frântă identică, şi apoi o a patra - perpendiculară pe a treia.

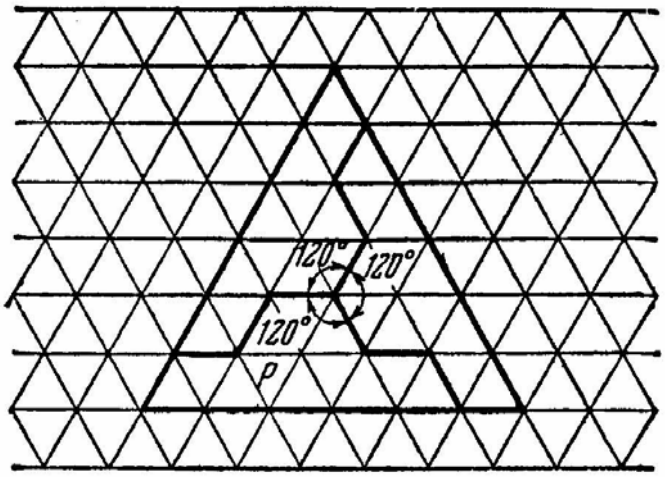


Aceste linii frânte vor secționa pătratul în 4 figuri egale, pe care le vom denumi pe fiecare în parte poligonul P. Dacă în fiecare figură P intră n pătrate-unități, rezultă că din n pătrate mari se poate alcătui cu siguranță poligonul P'. Deoarece într-un pătrat mare sunt 4 figuri P, poligonul P' poate fi alcătuit din 4n figuri P. Astfel, de pildă, din 4 pătrate mari de tipul a din figura de mai sus, cu alte cuvinte din 16 poligoane haşurate P, se pot alcătui cu uşurință poligoane P' asemenea cu ele. Pentru a forma poligoane asemenea cu poligoanele P compuse din nouă

pătrate-unități (b), sunt suficiente 36 de figuri P. Acest procedeu poate fi extins şi asupra poligoanelor alcătuite din triunghiuri echilaterale egale.

Metoda propusă pentru alcătuirea de poligoane P', asemenea poligoanelor P date, ne asigura un număr *suficient* de figuri inițiale P; dacă însă toate figurile P sunt decupate din pătratul mare, adică dacă le separăm şi le folosim independent, atunci pentru alcătuirea poligonului P' s-ar putea să fie nevoie de un număr mai mic de figuri P.

De obicei nu există hârtie liniată în triunghiuri echilaterale; ca atare trebuie s-o pregătim noi. Folosim aceleaşi notații ca mai înainte.



Să construim acum un triunghi mare (figura anterioară), care conține orice număr multiplu de trei de triunghiuri echilaterale unități (3n). Din centrul acestui triunghi ducem spre laturile lui, de-a lungul laturilor triunghiurilor-unitate, 3 linii frânte, astfel ca între ele să se formeze unghiuri de 120° şi toate să aibă aceeaşi configurație (de pildă, ca în figura de mai sus). Aceste linii frânte vor secționa triunghiul în 3 figuri egale; vom considera pe fiecare din ele poligonun inițial P. Dacă în fiecare figură P intră n triunghiuri unitate, iar 3 figuri P alcătuiesc un triunghi mare, atunci din n triunghiuri mari de acest fel este uşor să se alcătuiască P' (figură asemenea cu poligonul P). Cu alte cuvinte, pentru alcătuirea figurii P' sunt suficiente 3n figuri P. Răspundeți acum la următoarele întrebări:

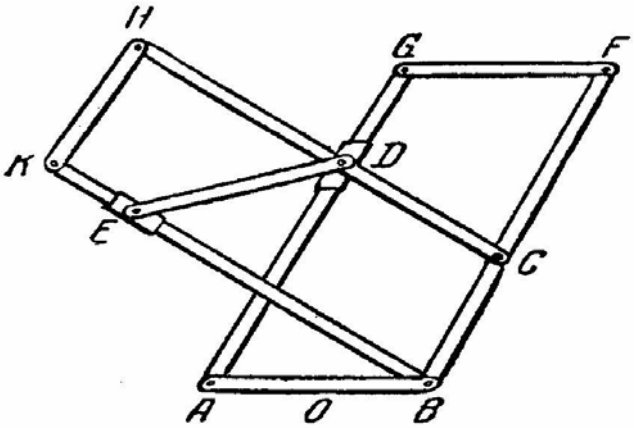
1) Ce număr de poligoane P, de tipul b din figura anterioară sunt suficiente pentru alcătuirea unui poligon asemenea P'? Verificați experimental dacă acest numă de figuri P este cel mai mic posibil.

2) Ce alte poligoane P pot fi formate prin linii frânte dintr-un pătrat analog celui din figura b? Dacă v-a plăcut procedeul expus mai sus de alcătuire a unui poligon din figuri asemenea cu el, gândiți-vă cum poate fi aplicat acest procedeu la formarea de poligoane inițiale nu dintr-un pătrat, ci dintr-un dreptunghi.

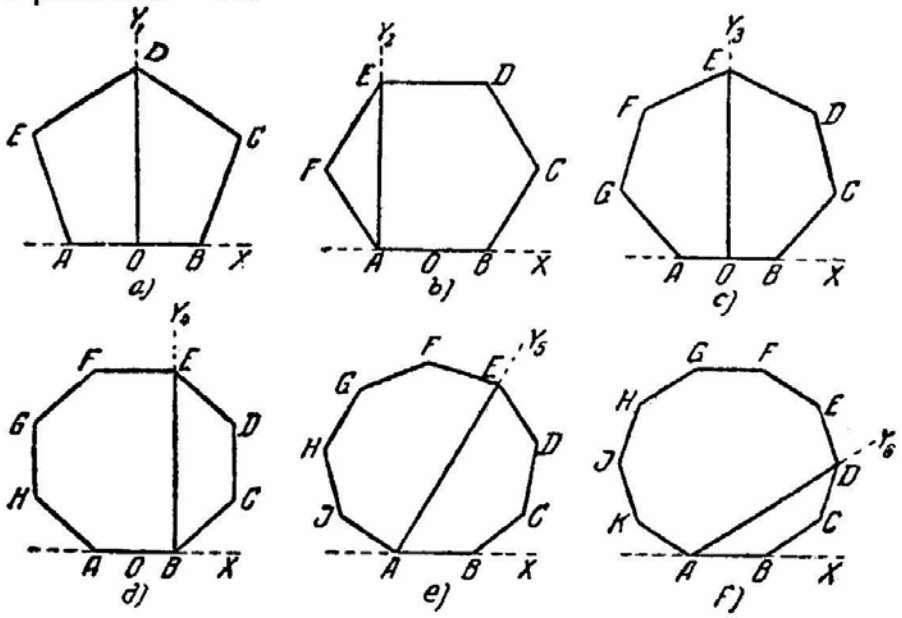
183. Dispozitiv cu articulație pentru construirea de poligoane regulate

Tinerii constructori de aparate de radio şi a tot felul de micromodele zburătoare sau plutitoare cunosc dificultățile legate de construirea unui pentagon sau septagon regulat. Compasul şi rigla nu sunt suficiente în cazul de față pentru o construcție precisă. Vă puteți confecționa însă şi singuri un dispozitiv simplu, util pentru construirea oricărui poligon regulat cu 5 până la 10 laturi. Dispozitivul este

alcătuit din vergele sau şipci mobile dispuse în aşa fel, încât să formeze două paralelograme egale, ABFG şi BCHK.



Vergeaua DE este fixată de glisoarele D şi E, care se deplasează liber: D de-a lungul laturii AG, iar E de-a lungul laturii BK. Dimensiunile vergelelor trebuie să fie astfel calculate încât AB = BC = CD = DE. Oricare ar fi poziția lui D pe AG şi a lui E pe BK, paralelogramele ABFG şi BCHK rămân egale; de asemenea rămân egale şi trapezele ABCD şi BCDE, asigurându-se astfel, în orice poziție a vergelelor, şi egalitatea unghiurilor unui poligon cu n laturi, ale cărui patru laturi consecutive vor fi de fiecare dată AB, BC, CD şi DE, iar unghiurile interne ‹ABC, ‹BCD şi ‹CDE. Această îmbinare a două paralelograme cu articulație - dacă laturile au o lungime suficientă - oferă posibilitatea ca printr-un procedeu stereotip să se construiască în mod mecanic orice poligon regulat cu n laturi, de la n = 5 până la n = 10.



Pentru a construi un pătrat nu este nevoie, fireşte, de acest dispozitiv, dar cu ajutorul lui s-ar fi putut obține şi un pătrat, dacă în mod practic ar fi posibilă suprapunerea lui E peste A. Metodele practice pentru construirea poligoanelor regulate cu 5, 6, 7, 8, 9 şi 10 laturi cu ajutorul dispozitivului de mai sus se bazează, pe următoarele proprietăți ale poligoanelor respective:

a) ‹DOB = 90° la pentagon (a);

b) ‹EAB = 90° la hexagon (b);

c) ‹EOB = 90° la septagon (c);

d)<EBA = 90° la octogon (d);

e)<EAB = 60° la nonagon (e); *j)*<DAB = 36° la decagon (f).

Pentru a desena cu ajutorul dispozitivului poligoane regulate cu 5, 6, 7 sau 8 laturi trebuie să construim în prealabil unghiurile drepte Y_1OX, Y_2AX, Y_3OX, Y_4BX. Apoi aşezăm mecanismul cu vergeaua AB peste dreapta AB, suprapunând (conform schițelor a-d) fie punctele O, fie punctele B. în continuare, fixăm vergeaua AB de hârtie, trebuie să mişcăm celelalte vergele până când D se va suprapune peste dreapta OY_1 (pentru pentagon), sau până când E se va suprapune peste dreapta AY_2 (pentru hexagon), sau până când E se va suprapune peste OY_3 (pentru septagon) şi, în sfârşit, până când E se va suprapune peste BY_4 (pentru octogon).

Pentru a desena poligoane regulate cu n laturi, în cazul când n = 9 sau 10, trebuie să construim în prealabil secantele AY_5 şi AY_6, astfel încât $<Y_5AX = 60°$, iar $<Y_6AX = 36°$, apoi să aplicăm dispozitivul cu vergeaua AB peste dreapta AB, suprapunând punctele A, şi fixând pe hârtie bara AB, mişcăm celelalte vergele până când E se va suprapune peste AY_5 (pentru nonagon) sau până când D se va suprapune peste AY_6 (pentru decagon). Imobilizând bine dispozitivul în poziția necesară, vom obține 4 laturi consecutive (şi 5 vârfuri) ale poligonului regulat cu n laturi pe care-l căutăm. Având 4 laturi ale poligonului cu n laturi, nu este greu să-1 construim în continuare prin sucirea succesivă a tiparului format de vergelele imobilizate. Evident că lungimea fiecărui poligon cu n laturi astfel construit va fi egală cu lungimea vergelei AB. Dacă avem nevoie de un poligon cu alte dimensiuni, îl putem obține prin transformarea corespunzătoare a poligonului construit (lungind sau scurtând laturile prin translație). Din punct de vedere teoretic, construcția este precisă; din punct de vedere practic, însă exactitatea construcției depinde de precizia cu care a fost confecționat aparatul. Dispozitivul descris poate fi confecționat din lemn sau din metal uşor.

Problemă. Desigur, ştiți să împărțiți un unghi în jumătate, folosindu-vă de compas şi riglă. Se cere să construiți un unghi de 1°, folosindu-vă inițial de dispozitivul cu articulație, iar ulterior de compas şi riglă.

Capitolul 5 *Cu şi fără ajutorul algebrei*

O dată cu dezvoltarea matematicii s-a perfecționat şi arta rezolvării problemelor. Pe măsură ce se dezvolta notația prin litere, metodele de rezolvare pur aritmetice cedau întâietatea algebrei, cu aparatul ei de ecuații. Notarea numerelor necunoscute prin litere, urmată de stabilirea raporturilor dintre numerele cunoscute şi cele necunoscute, adică punerea în ecuație a unei probleme, a constituit o metodă originală, uniformă şi accesibilă tuturor pentru rezolvarea problemelor de diferite tipuri. Când rezolvăm o problemă, noi raționăm întotdeauna, dar căutăm să formăm un lanț cât mai scurt de raționamente. Uneori este mai comod şi mai simplu să se raționeze „de la necunoscut la cunoscut", ajungându-se la scrierea uneia sau mai multor ecuații (metoda algebrică). în aceste cazuri, pentru alegerea cea mai potrivită a necunoscutei în raport cu care se formează ecuația, trebuie să ținem seama de particularitățile caracteristice ale problemei respective. Spre a putea rezolva cu succes probleme grele, trebuie să cunoaştem procedeele raționamentelor algebrice. în alte cazuri, dimpotrivă, este mai bine să se rezolve problema în câteva etape, pornind „de la cunoscut la necunoscut" şi explicând concret fiecare etapă a rezolvării (metoda aritmetică). Ambele metode de raționament se completează parcă reciproc; amândouă ne oferă moduri ingenioase şi elegante de rezolvare a problemelor. De mai bine de o jumătate de veac, cu prilejul reuniunilor familiare, iar uneori chiar şi în şcoli, se propune spre rezolvare următoarea problemă:

GÂNSACUL ŞI COCOSTÂRCUL

Pe când zbura spre meleagurile calde, un cârd de gâşte s-a întâlnit cu un gânsac, care le-a spus: „Bună ziua, o sută de gâşte!" O gâscă bătrână, care zbura în frunte, i-a răspuns: „Nu, nu suntem o sută! Dacă am fi încă o dată atâtea câte suntem şi încă pe jumătate atâtea, şi încă pe sfert atâtea şi ai mai fi şi tu cu noi, gânsacule, atunci am fi o sută, dar aşa... n-ai decât să socoti şi ai să afli câte suntem!" Gânsacul nostru zbură mai departe şi căzu pe gânduri. Într-adevăr, câte gâşte a întâlnit? S-a gândit, s-a tot gândit şi, oricum o sucea, nu era în stare să rezolve problema. Deodată zări un cocostârc pe malul unui iaz. „Picioare-lungi" umbla de colo până colo, căutând broaşte. Precum se ştie, cocostârcul este o pasăre înțeleaptă şi printre celelalte aripate se bucură de faima unui bun matematician: ore întregi stă într-un picior şi se gândeşte la tot felul de probleme. Tare s-a mai bucurat gânsacul. S-a lăsat lin pe apa heleşteului, s-a apropiat de cocostârc şi i-a povestit cum s-a întâlnit cu un cârd de gâşte prietene şi ce i-a spus gâscă bătrână. I-a mai spus că se chinuie să rezolve problema, dar nu izbuteşte.

- M-da, - răspunse cocostârcul. Să încercăm s-o rezolvăm. Să fii numai atent şi caută să înțelegi cele ce-ți spun! Se aude?

- Te ascult şi-mi voi da toată silința să pricep! răspunse gânsacul.

- Deci ți s-a spus aşa: dacă la gâştele pe care le-ai întâlnit ai mai adăuga încă o dată pe atâtea şi încă pe jumătate atâtea şi încă pe un sfert atâtea, atunci împreună cu tine ar fi o sută de gâşte? Aşa-i?

- Aşa-i! - răspunse gânsacul.

- Acum, fii atent! - zise cocostârcul. Am să desenez ceva pe nisipul de pe mal. Cocostârcul îşi îndoi gâtul şi trase cu ciocul o linie dreaptă; alături mai trase una. Apoi mai trase un segment egal cu jumătate de linie, un alt segemnt egal cu un sfert de linie şi a mai făcut o linie micuță de tot cât un punct. Apăru următorul desen:



Gânsacul înotă spre mal, ieşi pe nisip, privi liniile, dar nu înțelese nimic.

- Înțelegi ceva? - întrebă cocostârcul.

- Deocamdată nimic! - răspunse gânsacul cu tristețe.

- Greu mai eşti de cap! Ți s-a spus doar: un cârd şi încă o dată un cârd ,o jumătate de cârd, un sfert de cârd şi cu tine. Aşa am şi desenat. Am tras o linie şi încă o linie, apoi o jumătate de linie, un sfert de linie şi o linioară micuță, adică pe tine. Ai înțeles?

- Am înțeles! - rosti gânsacul bucuros.

- Dacă la cârdul întâlnit de tine mai adăugăm unul la fel, apoi încă o jumătate de cârd, un sfert de cârd şi pe tine, câte gâşte vom avea?

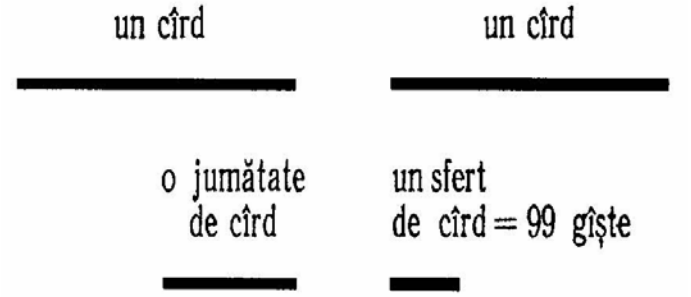
- O sută!

- Dar fără tine, câte gâşte vor fi?

- Nouăzeci şi nouă!

- Bine! Să ştergem din desenul nostru liniuța care te reprezintă pe tine şi să notăm că au rămas 99 de gâşte. Şi spunând aceste cuvinte, cocostârcul desenă cu ciocul pe nisip:

- Gândeşte-te bine acum, - continuă cocostârcul, - o jumătate de cârd câte sferturi are? Gânsacul căzu pe gânduri, privi liniile trase pe nisip şi spuse:



- Linia care indică o jumătate de cârd este de două ori mai mare decât linia care indică un sfert de cârd, adică o jumătate are două sferturi.

- Bravo! - îl lăudă cocostârcul. Ei, atunci, un cârd întreg câte sferturi are?

- Fireşte că patru sferturi! - răspunse gânsacul.

- Aşa! Deci, dacă transformăm în sferturi un cârd şi încă un cârd şi o jumătate de cârd şi adăugăm un sfert de cârd, câte sferturi vom avea? Gânsacul se gândi şi răspunse:

- Un cârd este egal cu 4 sferturi de cârd; încă un cârd înseamnă alte 4 sferturi de cârd, în total 8 sferturi; o jumătate de cârd are două sferturi, care

adunate cu cele 8 fac 10 sferturi, şi mai avem de adăugat încă un sfert. Cu totul vom avea 11 sferturi de cârd, în care sunt cuprinse 99 de gâşte.

- Bine! - spuse cocostârcul. Acum spune-mi la ce ți-a folosit toată judecata asta?

- Am aflat, - răspunse gânsacul, - că 11 sferturi de cârd au 99 de gâşte.

- Deci, într-un sfert de cârd câte gâşte sunt? Gânsacul împărți 99 cu 11 şi răspunse:

- Într-un sfert de cârd sunt 9 gâşte.

- Atunci câte gâşte sunt într-un cârd?

- Un cârd are 4 sferturi... Am întâlnit 36 de gâşte! - gâgâi bucuros gânsacul.

- Exact! - spuse cocostârcul. Singur nu te-a dus capul... Gânsac ce eşti!...

Această problemă poate fi scrisă lapidar şi rezolvată uşor cu ajutorul algebrei. Să notăm cu **x** un sfert de cârd. în acest caz cârdul întreg se va nota cu 4**x**, iar o jumătate de cârd cu 2**x**. Deci avem: 4**x** + 4**x** + 2**x** + **x** = 99, sau 11**x** = 99, de unde **x** = 99 : 11 = 9, iar 4**x** = 4 x 9 =36. Prin urmare cârdul avea 36 de gâşte.

Problemele ce urmează pot fi rezolvate prin oricare din metodele pe care le cunoaşteți: aritmetic, algebric, grafic etc. Răspunsurile care se dau la sfârşitul cărții pot fi completate cu raționamente şi soluții proprii.

184. Ajutor reciproc

Din cauza distrugerilor săvârşite de fascişti, în primii ani după război, fermele duceau lipsă de unele maşini agricole, lipsă pe care o resimțeau mai cu seama în vremurile când muncile agricole erau în toi. De aceea fermele îşi împrumutau reciproc diferite maşini şi unelte. într-o zi o stațiune de maşini şi tractoare a împrumtat altor două ferme diferite maşini agricole. Ea le-a dat tot atâtea maşini câte aveau fiecare în acel moment. După un timp, a doua fermă împrumută primei şi celei de-a treia atâtea maşini, câte aveau fiecare în acea clipă. Spre sfârşitul muncilor veni rândul celei de-a treia ferme să împrumute pe prima şi pe a doua, şi le dădu fiecăruia atâtea maşini câte aveau în acel moment. După aceasta fiecare din cele 3 ferme avea câte 24 maşini. Câte maşini agricole a avut la început fiecare fermă?

185. Trântorul şi dracul

Printre noi, oameni cu dragoste de muncă, s-a aciuat un trântor, care nu voia nici să învețe şi nici să muncească, dar era lacom de bani. Nu voia nicicum să înțeleagă că numai banii câştigați prin muncă cinstită aduc mulțumire. Trântorul umbla hai-hui şi se văicărea!

- Vai de zilişoarele mele! Nimeni nu vrea să ştie de mine! Toți îmi spun: „N-avem nevoie de trântori. Nu faci nimic şi ne mai ții şi de vorbă. Du-te de aici!". Aş vrea să-l văd şi eu pe ăla care o să-mi spună cum să devin bogat?!

- N-apucă trântorul să-şi termine gândul, că înaintea lui se şi ivi un drăcuşor.

- Apoi, - spuse drăcuşorul, - dacă vrei, am să te ajut. Munca va fi uşoară şi te vei îmbogăți. Vezi puntea aceea peste pârâu?

- O văd, - răspunse trântorul.

- Atunci, n-ai decât să treci puntea pe malul celălalt şi vei avea în buzunar de două ori mai mulți bani decât ai acum. Dacă treci puntea înapoi, vei avea iarăşi de două ori mai mulți bani decât ai avut. Şi aşa, de fiecare dată când vei trece puntea, vei avea de două ori mai mulți bani decât ai avut.

- Minunat! - se bucură trântorul.

- Lucrurile se vor petrece cum ți-am spus, - adăugă dracul - dar trebuie să-mi dai şi mie ceva. Pentru că te-am făcut om bogat, de fiecare dată când treci puntea ai să-mi dai 24 de bănuți pentru sfatul meu cel bun.

- Mă învoiesc, - răspunse trântorul. Din moment ce banii mei se vor dubla, de ce să nu-ți dau de fiecare dată câte 24 de bănuți? Hai, să începem!

Trecu trântorul puntea o dată şi numără banii... Mare minune! într-adevăr, avea de două ori mai mulți bani decât avusese. Dădu dracului cei 24 de bănuți şi trecu puntea a doua oară. Banii s-au dublat iarăşi. Numără 24 de bănuți, îi dădu dracului şi trecu puntea pentru a treia oară. Banii s-au dublat iarăşi. Numai că avea exact 24 de bănuți, pe care a trebuit să-i dea drăcuşorului, după cum le-a fost vorba. Dracul izbucni în râs şi se făcu nevăzut. Trântorul nostru rămase fără un ban. De unde se vede că afară de sfaturile altora trebuie să ai şi puțină minte proprie! Câți bani a avut trântorul la început?

186. Merele

Trei frați au căpătat 24 mere. Fiecare primise atâtea mere câți ani avusese cu 3 ani în urmă. Mezinul, care era tare dezgheţat la minte, le propuse fraților săi următorul schimb de mere:

- Eu, - spuse el, - îmi voi opri numai jumătate din merele pe care le am, iar celelalte am să le împart între voi în părți egale. După aceasta fratele nostru mijlociu să-şi oprească şi el jumătate din câte mere va avea, iar celelalte să le împartă egal între mine şi fratele cel mare. Apoi cel mai mare să-şi oprească şi el jumătate din câte mere va avea, iar pe celelalte să le împartă egal între mine şi fratele mijlociu. Frații, fără să bănuiască nimic, s-au învoit să împartă merele aşa cum spusese mezinul. Ca urmare, fiecare a avut acelaşi număr de mere.

Câți ani avea fiecare dintre frați?

187. Vânătorii

Trei vânători erau plecați de mai multe zile la vânătoare. în dimineața ultimei zile de vânătoare s-a întâmplat un lucru neplăcut: trecând prin vadul unui pârâu, doi dintre vânători şi-au udat cartuşierele. O parte din cartuşele lor nu mai puteau fi folosite. Atunci cei trei prieteni şi-au împărțit cartuşele uscate în părți egale. După ce fiecare vânător a tras patru focuri, le-au rămas în total atâtea cartuşe, câte avusese fiecare după împărțeală. Câte cartuşe bune au fost în clipa împărțelii?

188. Din direcții contrare

Două trenuri de marfă, ambele în lungime de 250 m, vin unul în întâmpinarea altuia cu o viteză de 45 km/oră. Câte secunde vor trece din clipa întâlnirii

mecanicilor locomotivelor până în clipa când se vor întâlni frânării aflați în ultimele vagoane?

189. Veronica bate la maşina de scris

Mama a rugat-o pe Veronica să-i copieze un manuscris la maşină.

- Voi copia în medie câte 20 de pagini/zi, - hotărî Veronica. Prima jumătate a manuscrisului a fost copiată însă fără multă tragere de inimă, Vera bătând numai 10 pagini/zi. în schimb, din a doua jumătate a manuscrisului au fost copiate câte 30 de pagini/zi.

- Deci a rezultat o medie de 20 de pagini/zi, - a spus Veronica.

- Ai făcut o socoteală greşită, - răspunse mama.

- Cum se poate? 10 + 30 = 40; 40 : 2 = 20. Din prima jumătate a manuscrisului am copiat câte 10 pagini mai puțin pe zi, dar în schimb din a doua jumătate am copiat cu 10 pagini peste media stabilită.

- Totuşi, - insistă mama, - în medie ai copiat mai puțin de 20 de pagini/zi. Gândeşte-te bine şi ai să vezi că am dreptate.

Voi ce credeți?

190. O întâmplare cu ciuperci

Cinci prieteni - Măria, Colea, Vasile, Andrei şi Petre - care îşi petreceau vacanța de vară într-o tabără de pionieri, s-au dus în pădure după ciuperci. E drept că numai Măria a cules ciuperci de zor. Băieții au stat mai mult tolăniți pe iarbă, istorisind fel de fel de năzbâtii. Când veni vremea să se întoarcă în tabără, coşuletele băieților erau goale, în timp ce în coşulețul Măriei se aflau 45 ciuperci.

- Nu vă sade bine să vă întoarceți în tabără cu mâna goală, - spuse Măria şi le împărți băieților toate ciupercile (fără să-şi lase măcar una).

În drum însă Colea şi Andrei au dat peste un loc cu ciuperci şi şi-au mai umplut coşuletele. Colea a găsit doar 2 ciuperci, dar Andrei şi-a dublat numărul ciupercilor din coşuleț. Vasile şi Petre s-au hârjonit tot drumul şi au pierdut o parte din ciupercile lor. Vasile a pierdut două ciuperci, iar Petre jumătate din ciupercile căpătate de la Măria.

Spre mirarea lor, când şi-au numărat în tabără ciupercile aduse, toți aveau acelaşi număr de ciuperci. Povestind prietenilor lor matematicieni întâmplarea cu ciupercile, aceştia din urmă s-au întrebat dacă nu cumva pe baza datelor de mai sus vor izbuti să afle câte ciuperci primise la început fiecare băiat de la Măria. Voi ce credeți?

191. Cine va sosi primul?

Doi canotori sportivi au hotărât să facă următorul antrenament cu bărcile. Unul din ei trebuia să străbată o anumită distanță pe un râu, în aşa fel ca jumătate din drum să meargă împotriva curentului, în amonte, iar cealaltă jumătate în aval, ajutat de curentul apei. Celălalt urma să parcurgă aceeiaşi distanță, dar pe un lac cu apă stătătoare, aflat în vecinătatea râului. Să presupunem că ambii sportivi au vâslit

tot timpul în acelaşi ritm. Se întreabă: care din ei va sosi primul? Timpul pierdut pentru întoarcerea bărcii nu se socoteşte.

Observaţie. Acum vreo 40 de ani, o problemă asemănătoare s-a pus în practica zborului. Se organizau concursuri aviatice, în cadrul cărora piloţii trebuiau să parcurgă perimetrul unui vast câmp dreptunghiular, marcat prin patru stâlpi, care urmau să fie ocoliţi la viraj. S-a pus întrebarea, dacă condiţiile rămâneau aceleaşi în zilele cu vânt şi în zilele fără vânt.

192. Înotătorul şi pălăria

Un înotător a sărit dintr-o barcă, dusă de curentul apei, a înotat un timp împotriva curentului, apoi s-a întors şi a ajuns barca din urmă. Pentru ce i-a trebuit mai mult timp: pentru a înota împotriva curentului sau pentru a ajunge barca? Sau, poate, în ambele cazuri timpul este acelaşi?

Se presupune că el a înotat tot timpul în acelaşi ritm. Răspunsul care v-a venit în minte din primul moment a fost confirmat de raţionamentele ulterioare? Răspunsul corect este: pentru a ajunge barca înotătorului i-a trebuit exact atâta timp cât a pierdut înotând împotriva curentului. într-adevăr, curentul râului duce la vale cu aceeaşi viteza şi barca, şi înotătorul. Deci, curentul nu influenţează distanţa dintre înotător şi barcă, el fiind, ca să spunem aşa, inexistent. Prin urmare, cu toată prezenţa curentului, înotătorul a ajuns barca în tot atâta timp, cât a cheltuit ca să se îndepărteze de ea.

Închipuiţi-vă că un sportiv a sărit în apă de pe un pod şi a înotat împotriva curentului. în acelaşi moment unui spectator aflat pe pod i-a căzut pălăria în apă şi a fost dusă de curent. După zece minute, înotătorul a făcut întoarcerea şi când a ajuns la pod a fost rugat să nu se oprească, ci să înoate mai departe şi să aducă pălăria, înotătorul a ajuns-o sub al doilea pod, aflat la o distanţă de 1.000 de metri de primul. Viteza înotătorului nu este cunoscută, dar se ştie că a înotat tot timpul în acelaşi ritm. Dispunând numai de aceste date, stabiliţi viteza curentului acestui râu.

193. Două nave

Două nave-şcoală au plecat în acelaşi moment dintr-un port. Nava „Stepan Razin" a pornit în aval (în sensul curentului), iar nava „Timiriazev" în amonte (împotriva curentului). Vitezele lor proprii sunt egale (viteza proprie este viteza dezvoltată cu aceeaşi cheltuială de energie în apă stătătoare). În ziua plecării, un colac de salvare a căzut de pe nava „Stepan Razin" şi a plutit la vale. După o oră, ambele nave au primit prin radio ordinul să schimbe direcţia: nava care naviga în aval trebuia să întoarcă împotriva curentului, iar cea care naviga împotriva curentului - să meargă în sensul curentului. Va izbuti echipajul navei „Stepan Razin" să prindă colacul de salvare care pluteşte pe râu, înainte de a se întâlni cu cealaltă navă?

194. Controlaţi-vă iscusinţa matematică

Două hidroglisoare navighează în sensuri opuse de-a lungul unui mare lac, fără să se oprească la mal. Viteza hidroglisoarelor este constantă. Ambele au plecat în acelaşi timp de la maluri opuse: hidroglisorul M a părăsit malul A, iar hidroglisorul N

a părăsit malul B şi s-au întâlnit prima data la 500 m de malul A; întorcându-se, s-au întâlnit pentru a doua oară la 300 m de malul B. Pe baza acestor date, stabiliți lungimea lacului şi raporturile dintre vitezele hidroglisoarelor. Iscusința vă va ajuta să rezolvați această problemă mental, fără calcule complicate.

195. Încurcătura

La plantarea livezii şcolii, elevii au participat în mod activ. Clasele lor se aflau în întrecere. Toți copiii munceau cu râvnă, dar iată că în clasa a V-a s-a ivit o încurcătură. Ionel a declarat că echipa lui va planta jumătate din numărul pomilor plantați de toți ceilaiți elevi din şcoală. Marius, în numele echipei sale, s-a angajat să planteze atâția pomi câți vor planta toți ceilaiți elevi ai clasei (inclusiv echipa lui Ionel). Elevii nu lucrau toți dintr-o dată, ci pe rând, pe echipe. Echipele lui Ionel şi Marius trebuiau să lucreze împreună, fiind ultimele.

Toate celelalte echipe din şcoala lor şi-au îndeplinit cu succes angajamentele. Ele au plantat în total 40 de pomi. Când veni rândul echipelor lui Ionel şi Marius, se ivi o dificultate la care nu se gândise nimeni, deşi putea fi prevăzută. Ca să-şi îndeplinească angajamentul, Ionel trebuia să cunoască numărul de copaci plantați de echipa lui Marius, iar acesta trebuia la rândul său să ştie câți copaci va planta echipa lui Ionel. Ambele echipe se aşteptau reciproc şi situația părea fără ieşire, dar instructorul le-a indicat o soluție simplă şi logică.

Ce le-a spus el?

196. De câte ori mai mult?

Se dau două numere diferite. Dacă vom scădea din fiecare jumătatea celui mai mic, atunci restul numărului mai mare va fi de trei ori mai mare decât restul numărului mai mic.

De câte ori numărul mai mare era mai mare decât numărul mai mic?

197. Motonava şi hidroavionul

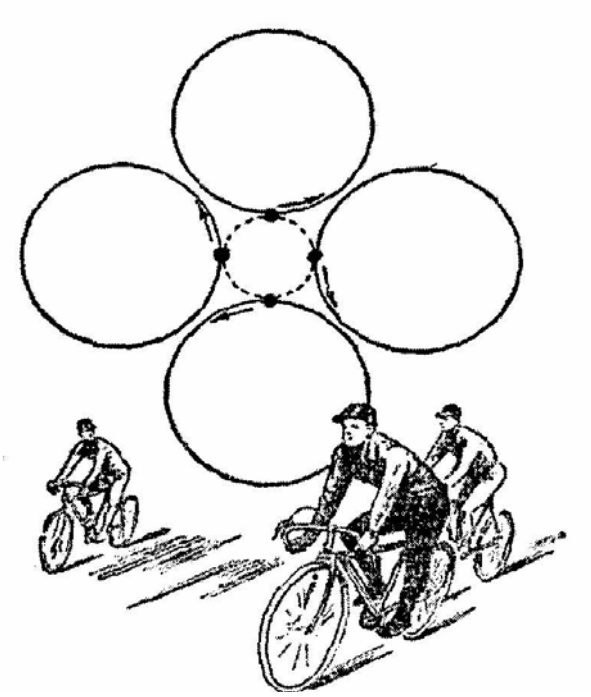
O motonavă a plecat într-o cursă lungă pe mare. Când nava s-a depărtat la 180 mile de țărm, a fost trimis după ea un hidroavion cu un mesaj urgent. Viteza hidroavionului este de zece ori mai mare decât viteza motonavei.

La ce distanță de coastă a ajuns-o hidroavionul?

198. Bicicliştii acrobați în arenă

Arena se afla pe un vast teren, perfect neted, străbătut de patru cărări circulare. Cei 4 biciclişti prezintă aici numărul lor de circ. Fiecare biciclist merge pe cărarea (cercul) său.

Ei pornesc în acelaşi timp şi fiecare pleacă din punctul aflat cel mai aproape de centrul arenei.



Viteza cu care se deplasează fiecare biciclist este calculată matematic şi poate fi astfel exprimată în unități convenționale de lungime:

V_1 = 6 unități/oră,

V_2 = 9 unități/oră,

V_3 = 12 unități/oră,

V_4 = 15 unități/oră.

Lungimea fiecărui cerc este de 1/3 din unitatea convențională de lungime. Demonstrația executată de bicicliştii acrobați durează 20 de minute.

În decursul acestor 20 de minute bicicliştii acrobați se vor mai găsi concomitent, o dată sau de mai multe ori, în punctele din care au plecat?

199. Cu ce viteză?

După ce un strungar a sporit viteza de aşchiere a fontei cu 1.690 m/min, timpul necesar pentru prelucrarea unei piese a scăzut de la 35 de minute la 2,5 minute.

Cu ce viteză de aşchiere lucra el acum?

200. Călătoria lui Jack London

Într-o nuvelă a lui Jack London se povesteşte cum autorul zorea din Skagway spre tabăra sa, unde prietenul lui trăgea să moară. London călătorea cu o sanie trasă de 5 câini. în nuvela se dau câteva amănunte interesante, care permit ca ea să fie transformată într-o problemă distractivă. în prima zi de drum sania a mers cu viteza prevăzută de Jack London. în timpul unui scurt popas, doi câini au ros hamurile şi s-au luat după o haită de lupi, aşa că a doua zi London a trebuit să continue drumul cu 3 câini, care trăgeau sania cu o viteză egală cu 3/5 din viteza inițială. Din această cauză el a sosit la destinație cu două zile mai târziu decât crezuse. Şi autorul nuvelei adaugă: „Dacă cei doi câini fugiți ar fi tras sania încă 50 de mile, n-aş fi întârziat

decât o o zi față de termenul fixat". Se întreabă: care era distanța între Skagway şi tabără?

London nu ne-o spune, dar din datele pe care le cunoaştem o putem stabili.

201. Din cauza unor analogii greşite, putem săvârşi diferite erori

Unele concluzii şi chiar descoperiri se fac prin analogie, la baza căreia stă presupunerea că dacă unele din însuşirile sau caracteristicile a două obiecte sunt asemănătoare, identitatea rămâne valabilă şi pentru alte însuşiri ale obiectelor respective. Analogia însă nu demonstrează nimic. Ea nu ne poate da decât o idee, a cărei justețe trebuie controlată şi confirmată. Şi în matematică pot fi făcute analogii reuşite. Este clar că descoperirea oricărei asemănări în operațiunile matematice, în aplicarea regulilor etc, uşurează rezolvarea problemelor, ajută gândirea. Relevând proprietățile şi caracteristicile asemănătoare, să nu uităm însă că există şi deosebiri. Analogiile nereuşite generează reprezentări eronate. Uneori întrebăm un prieten:

- Cu câte unități este mai mare 40 decât 32?

- Cu 8, - răspunde acesta imediat.

- Dar cu câte unități este mai mic 32 decât 40?

- Desigur tot cu 8 unități.

- Exact. Acum, gândeşte-te, cu câte procente este mai mare numărul 40 decât numărul 32? De altfel, nu te obosi! îți voi spune eu. Exact cu 25%. Dar hai să calculăm cu câte procente este mai mic numărul 32 decât 40?

- Ce să mai calculăm, - ne întrerupe prietenul, - mi-ai spus doar chiar acum că 40 este cu 25% mai mare decât 32, deci 32 este tot cu 25% mai mic decât 40 ... Trebuie să-i explicăm amănunțit în ce constă eroarea lui.

Într-adevăr, diferența este în ambele cazuri aceeaşi - 8. Dar în primul caz o raportăm la numărul 32, considerat 100%, iar în al doilea caz la numărul 40, considerat 100%. Față de 40, numărul 8 reprezintă o cincime sau 20%. Aşadar 40 este cu 25% mai mare decât 32, în timp ce 32 este cu 20% mai mic decât 40. Greşeala prietenului se datoreşte unei analogii greşite. Propuneți prietenilor următoarele probleme:

Problema 1. Să presupunem că salariul lunar ți-a fost mărit cu 30%. Cu câte procente a crescut capacitatea dumitale de cumpărare?

Problema 2. Să presupunem că salariul lunar a rămas acelaşi, dar prețurile mărfurilor au fost reduse cu 30%. Cu câte procente a crescut capacitatea dumitale de cumpărare în acest caz?

Problema 3. Un anticariat a redus cu 10% prețul cărților vândute şi totuşi obținea un beneficiu de 8%. Ce beneficiu (în procente) dorea inițial să obțină anticariatul din vânzarea cărților?

Problema 4. Dacă un muncitor a redus cu p% timpul necesar confecționării unei piese, cu câte procente a crescut productivitatea muncii sale?

Răspunsuri greşite la aceste întrebări simple veți căpăta de multe ori, dar mai întâi controlați-vă... propriile raționamente.

202. Un caz juridic

Romanii nu au vădit un interes deosebit pentru matematică. În schimb, în domeniul ştiinţelor juridice ne-au lăsat lucrări remarcabile. Lucrările de matematică din acele timpuri, care au ajuns până la noi, au de cele mai multe ori un caracter practic, pur utilitar. Multe din problemele de aritmetică tratate în ele îşi au originea în legile romane cu privire la succesiune. Iată una din aceste probleme ale antichităţii. Murind, un roman ştia că soţia lui aşteaptă un copil şi a făcut următorul testament: dacă se va naşte un băiat, să i se dea 2/3 din averea rămasă, iar restul de 1/3 mamei. în cazul când se va naşte o fată, ea va căpăta 1/3, iar mama 2/3 din avere. Văduva testatorului a născut doi gemeni - un băiat şi o fată. Acest caz nu era prevăzut în testament.

Cum trebuie împărţită averea între cei trei moştenitori, astfel ca să se ţină cât mai mult seama de prevederile testamentului? Rezolvarea matematică a acestei probleme depinde de interpretarea juridică a voinţei testatorului. Una din variantele fundamentate juridic a rezolvării acestei probleme a fost dată de juristul roman Salvius Julianus.

203. Câte doi şi câte trei

Am hotărât să măsor în paşi distanţa dintre casa mea şi cea a prietenului meu. Mergeam cu paşi egali şi jumătate de drum i-am numărat perechi (câte doi), iar cealaltă jumătate i-am numărat câte trei. Când am ajuns la destinaţie am constatat că numărul paşilor perechi era cu 250 mai mare decât numărul paşilor socotiţi câte trei.

Câţi paşi sunt până la casa prietenului meu?

204. Cine era călare?

Doi cetăţeni au plecat în acelaşi timp - unul călare, iar altul cu maşina - din sat spre oraş. Unul era flăcău, iar celălalt mai în etate. După un timp oarecare s-a văzut că dacă cel mai în vârstă ar fi străbătut o distanţă de 3 ori mai mare decât cea parcursă până atunci, i-ar fi rămas de mers de două ori mai puţin. Dacă cel tânăr ar fi parcurs o distanţă de două ori mai mică, atunci i-ar fi rămas de străbătut o distanţă de trei ori mai mare.

Stabiliţi care din ei mergea călare - cel tânăr sau cel în vârstă?

205. Doi motociclişti

Doi motociclişti au plecat împreună din acelaşi loc. Ambii au parcurs aceeaşi distanţă şi s-au întors acasă în acelaşi timp. Pe drum, motocicliştii s-au odihnit. Se ştie că unul dintre ei a acoperit traseul în de două ori atâta timp cât s-a odihnit celălalt, iar al doilea în de trei ori atâta timp cât s-a odihnit primul.

Care motociclist a mers mai repede?

206. În care avion se află tatăl lui Vladimir?

- Spune-mi, tăticule, - îl întreabă Vladimir pe tatăl său, care era aviator, - în care avion te găseai în timpul paradei aeriene?

- Poți afla cu uşurință singur, - răspunse tatăl lui Vladimir, - desenând pe o hârtie 9 avioane.

- Îmi aduc aminte că numărul avioanelor aflate în dreapta mea, înmulțit cu numărul avioanelor aflate în stânga mea, dădea un număr mai mic cu 3, decât în cazul când avionul meu s-ar fi găsit cu 3 locuri mai la dreapta. Vladimir se gândi puțin şi indică pe desen avionul pe care îl pilotase tatăl său.

Cum a aflat Vladimir avionul tatălui său?

207. Două lumânări

Au fost aprinse deodată două lumânări de lungimi şi grosimi diferite. Lumânarea lungă se va topi în întregime în 3 1/2 ore, iar cea scurtă în 5 ore. După ce au ars timp de 2 ore, lumânările au devenit de lungime egală.

De câte ori a fost inițial mai scurtă una din lumânări decât cealaltă?

208. Să împărțim

Împărțiți 45 în patru părți, aşa fel încât, dacă la prima parte vom adăuga 2, din a doua vom scădea 2, a treia o vom înmulți cu 2, iar a patra o vom împărți cu 2, toate rezultatele vor fi egale.

209. Perspicacitate uimitoare

Atunci când copiii îl vizitează pe vechiul lor prieten, contabilul Nikanorov, acesta le dă întotdeauna câte ceva de socotit. Dar, ciudat lucru, câteodată fără să cunoască numerele pe care le-au adunat sau le-au scăzut băieții, el se uita la rezultat şi spunea pe loc care din ei a adunat corect, care a greşit.

- Acum, - zise el, - alegeți un număr cu 4 cifre, bineînțeles fiecare să aleagă alt număr. Ați ales? Bun... Mutați prima cifră la sfârşitul numărului. Veți obține un alt număr cu 4 cifre. Adunați amândouă numerele. De exemplu: 1.234 + 2.341 = 3.575. Ați terminat? Spuneți-mi rezultatele.

Kolea: 8.612

Polea: 4.322

Tolea: 9.867

Olea: 13.859

- Ați greşit cu toții, afară de Tolea.

Verificând adunările, copiii au constatat că într-adevăr greşiseră.

Cum a procedat Nikanorov? El n-a ştiut ce numere au ales copiii!

210. Ora exactă

La atelierul cu firma „Ora exactă" au fost aduse 4 ceasornice: o pendulă, un ceas de voiaj, un deşteptător şi un ceas de mână. În comparație cu ora exactă, pendula rămâne în urmă cu două minute pe oră. În comparație cu pendula, ceasul de voiaj fuge cu două minute pe oră. În comparație cu ceasul de voiaj, deşteptătorul rămâne în urmă cu două minute pe oră, iar în comparație cu deşteptătorul, ceasul de mână fuge cu două minute pe oră. La ora 12 toate ceasurile au fost potrivite după ora exactă. Cât va arăta ceasul de mână la ora 19, când se dă ora exactă?

211. Ceasornicele

E o adevărată belea cu aceste ceasornice. La amiaza zilei de 2 ianuarie, eu şi Vasile le-am pus exact după radio. Peste câteva zile le-am comparat. Am văzut că ceasul meu fuge, iar al lui Vasile rămâne în urmă. Urmărindu-le o oră, am constatat că ceasul meu fuge cu o secundă, iar al lui Vasile rămâne în urmă cu 1 1/2 secunde/oră. Ne-au interesat următoarele întrebări: dacă nu vom muta acele ceasornicelor noastre, atunci:

1) Când vor arăta din nou amândouă ceasornicele aceeaşi oră?

2) Când vor mai arăta ele concomitent ora exactă?

212. La ce oră?

Problema 1. Câtva timp după ora 12 meşterul a plecat la masă. La plecare, s-a uitat la ceas şi a înregistrat poziția acelor ceasornicului. La întoarcere a constatat că acele cesornicului şi-au schimbat locurile, minutarul luând locul acului care indică orele. La ce ora s-a întors meşterul? Dacă ați găsit soluția acestei probleme, n-o să vă vină prea greu să rezolvați următoarele două.

Problema 2. Am lipsit de acasă mai mult de două ore, dar mai puțin de trei. Când m-am întors, am constatat că în timpul lipsei mele acele pendulei noastre şi-au inversat locurile. Cât timp am lipsit de acasă?

Problema 3. Un şcolar a început să rezolve o problemă între orele 4 şi 5 după-amiaza, atunci când acele ceasornicului se suprapuneau, şi a terminat-o atunci când minutarul forma o linie dreaptă cu celălalt ac. Câte minute i-au trebuit şcolarului pentru rezolvarea problemei şi la ce oră a terminat-o?

213. La ce oră a început şi s-a terminat consfătuirea?

O consfătuire a început între ora 6 şi 7 după-amiaza şi s-a terminat între ora 9 şi 10 seara. Să se stabilească exact la ce oră a început şi s-a terminat consfătuirea, dacă acele ceasornicului şi-au schimbat reciproc locul în timpul cât a durat consfătuirea.

214. Sergentul îi antrenează pe cercetaşi

Sergentul Semocikin, comandantul plutonului de cercetaşi, profita de orice ocazie prielnică pentru a dezvolta spiritul de observație şi ingeniozitatea subalternilor săi, pentru a-i deprinde cu vicleşugurile războiului. Uneori îi întreabă dintr-odată:

- Câți stâlpi a avut podul pe care l-am trecut astăzi?

Alteori le dădea câte o problema pe care s-o rezolve în timpul liber.

- Închipuiți-vă, - le spuse odată Semocikin, pufăind din lulea - că doi, cercetaşi din detaşamentul nostru au fost trimişi în acelaşi loc. Ambii au mers pe acelaşi drum, dar unul din ei a mers mai încet, iar celălalt mai repede.

Primul cercetaş a mers cu o viteză constantă jumătate din timpul necesar. Al doilea a mers cu aceeaşi viteză jumătate din drum. Primul cercetaş a mers a doua jumătate de timp cu o viteză schimbată; cu aceeaşi viteză schimbată a parcurs a

doua jumătate de drum şi al doilea cercetaş. Care din ei a sosit primul la locul de destinație?

Pentru rezolvarea acestei probleme, cercetaşii au dat diferite valori numerice distanței şi vitezei cu care s-a mers - atât celei inițiale, cât şi celei schimbate - au făcut calculele necesare şi de fiecare dată au ajuns la acelaşi rezultat: primul cercetaş a pierdut mai puțin timp pentru drum, decât al doilea. Cercetaşii care au rezolvat problema cu ajutorul algebrei, au obținut acelaşi rezultat. Astfel, ei au demonstrat că, în condițiile date, primul cercetaş va ajunge mai repede decât al doilea, indiferent de distanța şi de mărimea numerică a vitezelor.

Puteți soluționa această problemă „în litere"?

215. Două comunicări

Prima comunicare:

- Trenul N a trecut în fața mea timp de t_1 secunde. A doua comunicare:

- Acelaşi tren N a trecut peste un pod, în lungime de ***a*** metri, în timpul de t_2 secunde.

Cum putem stabili pe baza acestor 2 comunicări lungimea şi viteza trenului N, presupunând că viteza lui este constantă?

216. Câte stații noi s-au construit?

- Creşterea impetuoasă a industriei şi agriculturii în țara noastră este însoțită de construirea unor noi aşezări şi oraşe, deci şi de extinderea continuă a rețelei căilor ferate, - a spus şeful regionalei N, la adunarea generală a muncitorilor şi funcționarilor.

- Pe una din ramificațiile regionalei noastre, - a continuat el, - se va termina peste puțin timp construirea de noi stații de cale ferată pentru pasageri. Trebuie să ne pregătim în mod exemplar în vederea dării lor în exploatare şi să nu admitem deficiențe în buna funcționare a transporturilor.

- S-au tipărit biletele pentru pasagerii care vor călători pe calea noastră ferată? - se interesă casierul şef.

- Da, toate biletele necesare au fost tipărite; dar, pentru ca pasagerii să poată obține în orice stație a căii noastre ferate bilete până la orice altă stație de pe aceste linii, a trebuit să tipărim acum, o dată cu darea în exploatare a noilor stații, un număr de 46 serii suplimentare de bilete.

Pe baza acestor date stabiliți câte stații avea calea ferată N şi câte stații noi au fost construite?

217. Alegeți patru cuvinte

AC
CAP
BANI
STEAG
PORUMB
MESERIE

VICTORIE
SOCIALISM
MATEMATICĂ
CALIFICAREA
ÎNSUFLEȚIREA
ÎMBUNĂTĂȚIREA
ELECTRIFICAREA
ÎMPROPRIETĂRIRE

Coloana anterioară este alcătuită din 14 cuvinte. Fiecare cuvânt are o literă mai mult decât cel precedent. Primul cuvânt - „ac" - are 2 litere, iar ultimul - „împroprietărire" - are 15 litere. Alegeți 4 din aceste 14 cuvinte, astfel ca să satisfacă egalitățile: $a^2 = bd$, $ad = b^2c$.

Cu a, b, c şi d am notat numărul de litere din primul, al doilea, al treilea şi al patrulea cuvânt ales. Care sunt aceste cuvinte?

218. Se poate cântări în felul acesta?

O bună balanță cu talere trebuie să aibă brațele egale (a = b). În piață s-a deschis un nou chioşc pentru vânzarea articolelor de băcănie. Din păcate, cântarul adus nu avea brațele egale şi nu putea fi folosit.

- Cântarul defect va fi înlocuit mâine, - spuse responsabilul vânzătorului, - deocamdată să nu vindeți decât mărfuri ambalate.

Cu puțin timp înainte de închidere s-a vândut ultimul pachet de zahăr ambalat, când veni un client care dorea să cumpere 2 kg de zahăr. Vânzătorul nu voia să-l lase neservit. El hotărî să folosească cântarul defect şi propuse clientului următorul mod de cântărire:

- Fără să echilibrez în prealabil cântarul voi pune o greutate de 1 kg pe talerul din stânga, iar zahărul îl voi pune pe talerul din dreapta. Apoi voi proceda invers: voi pune greutatea pe talerul drept şi zahărul pe cel stâng. Cred că voi proceda corect, căci dacă în primul pachet veți avea ceva mai puțin de 1 kg de zahăr, în al doilea pachet veți avea în schimb ceva mai mult.

Putea cumpărătorul să se declare de acord cu acest fel de a cântări zahărul?

Întrebări suplimentare:

1) Ştiți că există o metodă (şi chiar mai multe) pentru a cântări exact cu ajutorul unui cântar defect sau neechilibrat?

2) Cum se determină greutatea pe un cântar cu brațe neegale, dar care au fost echilibrate?

219. Elefantul şi țânțarul

Un amator de distracții matematice, făcând diferite transformări ale expresiilor algebrice, a ajuns la concluzia ciudată că greutatea unui elefant este egala cu greutatea unui țânțar. El a raționat în felul următor:

Fie x greutatea elefantului şi y greutatea țânțarului. Notăm cu 2v suma acestor greutăți: $x + y = 2v$.

Din această egalitate putem obține alte două:

x - 2v = - y; x = - y + 2v.

Să înmulțim aceste 2 egalități termen cu termen:

$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$.

Adunând la ambii membri ai acestei egalități v^2, vom obține:

$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$ sau $(x - v)^2 = (y - v)^2$.

Extrăgând rădăcina pătrată din ambii membri ai ultimei egalități, vom obține:

$x - v = y - v$ sau $x = y$. Prin urmare, greutatea elefantului *(x)* este egală cu greutatea țânțarului *(y).*

Socoteala e corectă sau nu? Puteți să-mi spuneți unde s-a greşit?

220. Un număr cu cinci cifre

Am avut o dată prilejul să văd un număr A cu 5 cifre, foarte interesant. Scriind o unitate înaintea acestui număr, obțineam, fireşte, un număr cu 6 cifre: [1] [A]; scriind o unitate la sfârşitul lui, obțineam de asemenea un număr cu 6 cifre: [A] [1]. Al doilea număr cu 6 cifre era însă de trei ori mai mare decât primul: $\frac{[A][1]}{[1][A]} = 3$.

Care este numărul A?

221. Să trăiți fără să îmbătrâniți

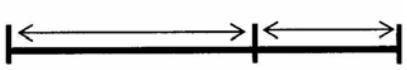
În unele cazuri o problemă este interesantă prin precizia şi concizia enunțului. În alte cazuri, dimpotrivă, este interesantă prin „întortochelile" enunțului, care seamănă cu o dantelă fină. Nu vreți, de exemplu, să stabiliți raportul dintre vârsta mea şi a voastră după următorul enunț „întortocheat"? Astăzi, avem împreună 86 de ani. Numărul anilor mai reprezintă 15/16 din vârsta care o vei avea tu atunci când vârsta mea va fi 9/16 din numărul de ani pe care ai să-l ai, dacă ai să ajungi la o vârstă care este de 2 ori mai mare decât numărul anilor pe care am să-i am eu în clipa când voi fi de 2 ori mai bătrân decât tine.

Câți ani am şi eu câți ani ai tu?

Această problemă poate fi rezolvată cu ajutorul următoarei metode, destul de ingenioasă.

Soluția. Examinați „dantela" enunțului problemei şi vei vedea următoarele „desene", care merg de la sfârşitul problemei spre începutul ei:

1) La un moment dat voi putea fi de 2 ori mai bătrân decât tine. Dacă atunci vârsta ta este *x,* a mea va fi *2x.* Pentru a ne reprezenta mai clar datele problemei, să notăm această relație dintre vârste cu ajutorul a două segmente, din care unul să fie de 2 ori mai mare decât celălalt:

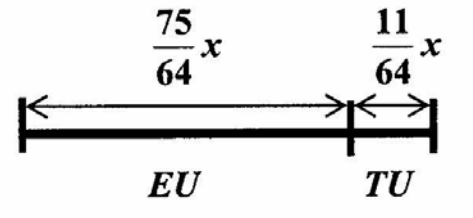


EU *TU*

De aici rezultă că eu sunt mai mare decât tine cu *x* ani şi că această diferență de vârstă se va menține mereu.

2) Altădată vârsta mea va fi de 9/4 din vârsta pe care ai avut-o în momentul (1); segmentul care reprezintă vârsta mea trebuie să fie acum de $2\frac{1}{4}x$, iar vârsta ta, care este întodeauna mai mică cu x, va fi de $1\frac{1}{4}x$.

3) Astăzi numărul anilor mei reprezintă 15/16 din vârsta pe care ai avut-o în momentul (2); cu alte cuvinte $\frac{15}{16}\cdot\frac{5}{4}\cdot x=\frac{75}{64}\cdot x$, tu continuând să ai cu *x* ani mai puțin, adică: $\frac{75}{64}\cdot x-x=\frac{11}{64}\cdot x$.



Deoarece astăzi avem împreună 86 de ani, deci $\frac{75}{64}\cdot x+\frac{11}{64}\cdot x=86$, rezultă că x este egal cu 64. Prin urmare eu am astăzi $\frac{75}{64}\cdot 64=75$ ani, iar tu ai $\frac{11}{64}\cdot 64=11$ ani.

Aşa reiese din problemă. În realitate, însă, eu sunt departe de a avea 75 de ani, în schimb tu ai probabil mai mult decât 11 ani. Acum rezolvați singuri o problemă asemănătoare. Astăzi am de 2 ori mai mulți ani decât ai avut tu atunci când eu am avut atâția ani, cât ai tu acum. Când vei avea atâția ani câți am eu acum, vom avea împreună 63 de ani.

Câți ani are astăzi fiecare dintre noi?

222. Problema lui Lucas

Această problemă a fost formulată de matematicianul E.Lucas, care a trăit în secolul trecut. Compatriotul său, matematicianul Lesane, povesteşte următoarea întâmplare, asigurându-ne de autenticitatea ei. în timpul unui congres ştiințific la care au participat numeroşi matematicieni din diferite țări, Lucas a anunțat la sfârşitul micului dejun că vrea să pună celor de față o întrebare dificilă.

- Să considerăm, - a spus Lucas, - că în fiecare zi la amiază, din Le Havre pleacă spre New York un vapor şi că în aceeaşi clipă un vapor al aceleiaşi societăți de navigație pleacă din New York spre Le Havre. Traversarea oceanului durează exact 7 zile, atât într-o direcție, cât şi în cealaltă. Câte vase ale societății din care face şi el parte va întâlni un vapor care părăseşte astăzi la amiază portul Le Havre?

Ce răspuns i-ați fi dat lui Lucas? Gândiți-vă la modul grafic de rezolvare a acestei probleme.

223. O plimbare interesantă

Doi băieți au hotărât să facă o mică excursie cu bicicletele. Pe drum bicicleta unuia s-a stricat şi a trebuit să fie lăsată la un atelier pentru reparații. Cu toate acestea, băieții au hotărât să nu întrerupă călătoria, ci s-o continue pe jos şi cu bicicleta, dar în felul următor:

De la atelier pornesc în acelaşi timp: unul pe bicicletă, celălalt pe jos. într-un anumit loc biciclistul va lăsa bicicleta şi îşi va continua drumul pe jos. Prietenul lui, ajungând la locul cuvenit, va urca pe bicicletă şi când îl va ajunge din urmă pe prietenul său îi va da bicicleta şi va continua drumul pe jos.

La ce distanță de punctul final al călătoriei lor trebuie lăsată ultima oară bicicleta, pentru ca ambii să ajungă în acelaşi timp la destinație, ştiind că de la atelierul unde au lăsat bicicleta defectă şi până la ținta propusă mai erau de parcurs 60 de km şi că ei fac pe jos 5 km/oră, iar cu bicicleta 15 km/oră.

Le convenea băieților acest mod de deplasare?

224. O proprietate a fracțiilor simple

Scrieți mai multe fracții simple, ai căror numitori şi numărători sunt numere pozitive. Acum scrieți o nouă fracție, al cărei numitor să fie egal cu suma tuturor numitorilor, iar numărătorul cu suma tuturor numărătorilor fracțiilor date: această nouă fracție va fi mai mare decât cea mai mică din fracțiile date, dar mai mică decât cea mai mare din ele. Controlați această proprietate cu ajutorul unui exemplu şi demonstrați valabilitatea ei pentru orice număr de fracții pozitive.

Capitolul 6 Divizibilitatea numerelor

Dintre toate operațiile aritmetice, cea mai capricioasă este împărțirea. Ea dispune de proprietăți speciale. Să luăm, de pildă, comportarea numărului 0 la împărțire. Pentru toate celelalte operații aritmetice 0 este un număr ca toate numerele. El poate fi adunat şi scăzut, poate fi înmulțitor în operația de înmulțire, dar împărțitor nu poate fi niciodată. Nici un număr, nici o expresie algebrică nu pot fi împărțite la 0. Aceasta este o proprietate importantă a împărțirii care, dacă nu i se dă atenția cuvenită, poate să ne joace tot felul de feste.

De exemplu, ea permite demonstrarea unor afirmații, despre care ştim din capul locului că sunt false. E vorba de *aşa-numitele paradoxuri.* Ce veți spune, de pildă, de următoarea afirmație:

Orice cantitate este egală cu jumătatea ei.

Demonstrație:

- fie a şi b două cantități egale: $a = b;$

$a = b \mid \cdot a \Rightarrow a^2 = ab \mid -b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = b(a - b) \mid : (a - b) \Rightarrow a + b = b$

- deoarece $b = a,$ putem înlocui în ultima egalitate pe b cu $a;$

- atunci $a + a = a \Leftrightarrow 2a = a \mid : 2 \Leftrightarrow a = \frac{a}{2}.$

Cu alte cuvinte, un întreg este egal cu jumătatea lui!?

Din punct de vedere formal totul este corect, dar, în fond, în calculele de mai sus s-a strecurat o eroare. Desigur ați fost atenți şi ați observat la care din transformări s-a greşit. Caracterul capricios al împărțirii se manifestă nu numai față de zero.

Teoria matematicii acordă multă atenție proprietăților numerelor întregi şi legilor după care se conduc operațiile cu aceste numere. Dacă ne vom limita numai la numerele întregi (pozitive şi negative), vom constata că şi aici *îşi face de cap* numai o singură operație: împărțirea. După cum ştiți, ea nu poate fi întotdeauna efectuată în sfera numerelor întregi. Se consideră că un număr întreg ***a*** se împarte la un număr întreg ***b,*** dacă printre numerele întregi se va găsi un număr întreg, ***c,*** care înmulțit cu ***b*** să dea *exact* numărul ***a;*** dacă nu există un asemenea număr spunem; că ***a*** nu se *împarte* la ***b.*** Toate aceste particularități ale împărțirii au favorizat apariția unor noțiuni ca: numere prime, cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c), cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c), reguli de divizibilitate etc.

Dezvoltarea treptată a teoriei divizibilității numerelor a dus treptat la o serioasă extindere a întregii teorii a numerelor.

Cred că rezolvarea problemelor cuprinse în acest capitol vă va spori bagajul de cunoştințe privind divizibilitatea numerelor şi, poate, vă va îndemna să studiați sistematic întreaga teorie a numerelor.

225. Numărul de pe mormânt

În una din piramidele Egiptului savanții au descoperit - pe o placă de piatră care acoperea mormântul - hieroglifa numărului 2.520. E greu de precizat motivul pentru care i s-a acordat o cinste atât de mare acestui număr. Poate pentru că se împarte exact la toate numerele întregi de la 1 până la 10. Într-adevăr, nu există un alt număr, mai mic ca 2.520, care să aibă această proprietate. Nu este greu să ne convingem că numărul 2.520 este cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi din prima decadă.

226. Daruri de Anul Nou

Pregătind darurile pentru pomul de Anul Nou, noi am împărțit uşor bomboanele şi dulciurile. Când am ajuns la mandarine, ne-am lovit de o mică dificultate: la început am vrut să le împărțim câte 10 în fiecare pachet. Din păcate, împărțeala nu se putea face exact, deoarece unul din pachete n-ar fi avut decât 9 mandarine; dacă am fi pus câte 9 mandarine în fiecare pachet, atunci unul din ele ar fi rămas numai cu 8; am încercat să le împărțim câte 8, dar unul rămâne cu 7; când le-am împărțit câte 7, ultimului pachet îi rămâneau 6. în sfârşit, le-am împărțit câte 6 şi, ultimului pachet îi reveneau ... 5 mandarine.

Am luat o coală de hârtie, un creion şi am început să calculăm. Ce să vezi? Dacă împărțeam numărul mandarinelor cu 5, rămânea un rest de 4; dacă-l împărțeam cu 4, rămânea un rest de 3; dacă împărțeam cu 3, rămânea rest 2; în sfârşit, dacă împărțeam cu 2, rămânea 1 mandarină. Ciudat număr de mandarine aveam... Puteți să-mi spuneți câte erau?

227. Există un asemenea număr

Există oare un număr care împărțit la 3 să dea rest 1, împărțit la 4 - să dea rest 2, împărțit la 5 să dea rest 3, iar împărțit la 6 să dea rest 4?

228. Coşul cu ouă

O femeie se ducea la piață să vândă un coş cu ouă. Un trecător neatent a îmbrâncit-o, coşul i-a scăpat din mâini, iar ouăle, bineînțeles, s-au spart. Vinovatul, vrând s-o despăgubească, a întrebat-o:

- Câte ouă ai avut în coş?

- Nu-mi aduc aminte, - i-a răspuns femeia, - ştiu că dacă le scoteam câte 2, câte 3, câte 4 sau câte 5, în coş rămânea un singur ou, iar dacă le scoteam 7 - nu rămânea niciunul. Câte ouă erau?

229. Un număr cu trei cifre

Cunosc un număr cu trei cifre din care dacă scad 7, se împarte la 7, dacă scad 8 se împarte cu 8, iar dacă scad 9 se împarte la 9. Care este numărul?

230. Patru vapoare

Într-un port erau ancorate patru vapoare. În data de 2 ianuarie 1953, la amiază, toate patru au părăsit în acelaşi timp portul. Se ştie că primul vapor revine în

portul respectiv din 4 în 4 săptămâni, al doilea din 8 în 8 săptămâni, al treilea la fiecare 12 săptămâni, al patrulea 16 săptămâni. La ce dată s-au întâlnit din nou în port toate cele patru vapoare?

231. Greşeala casierului

Adresându-se casierului unui magazin alimentar, un cumpărător i-a spus:

- Aveți de primit câte 90 de bani pentru 2 pachete de sare, câte 2,70 lei pentru 2 bucăți de săpun şi, afară de asta, mai am de plătit 3 pachețele cu zahăr vanilat şi 6 cutii cu chibrituri, dar nu-mi amintesc prețul zahărului şi al chibriturilor. Casierul i-a emis cumpărătorului un bon de 29,17 lei. Aruncându-şi o privire asupra bonului, cumpărătorul i 1-a înapoiat spunându-i:

- Cred că ați greşit la adunarea sumei totale. Casierul a verificat şi a recunoscut că a greşit, eliberând cumpărătorului un alt bon.

Cum a descoperit cumpărătorul greşeala casierului?

232. Rebus cu cifre

Raționând aritmetic, să se găsească numărul ***t*** şi cifra cu care trebuie înlocuită litera ***a*** în următoarea egalitate: $[3(230+t)]^2 = 492a04$.

233. Regula divizibilității cu 11

Unul din cele mai importante procedee de rezolvare a problemelor constă în reducerea problemei date la una mai simplă.

Să presupunem că ni se cere să stabilim dacă un număr oarecare cu mai multe cifre se împarte exact la un alt număr dat. De multe ori pentru a putea răspunde nu e nevoie să recurgem la operația propriu-zisă de împărțire. Deseori soluționarea unei probleme de acest fel poate fi redusă la constatarea divizibilității unui alt număr, care să nu fie cu mai multe cifre şi care să fie alcătuit, după o anumită regulă, din cifrele numărului respectiv.

Aşa au luat naştere regulile de divizibilitate a numerelor. Vă este cunoscută, de exemplu, următoarea regulă simplă a divizibilității numerelor cu 11?

Dacă suma cifrelor numărului respectiv adunate din 2 în 2 este egală cu suma celorlalte cifre rămase sau dacă diferența acestor sume - în caz că ele nu sunt egale - se împarte la 11, atunci se împarte la 11 şi numărul dat. Dacă, însă, diferența sumelor nu se împarte la 11, atunci nici numărul respectiv nu se împarte la 11.

Exemplu: Se împarte la 11 numărul 3.528.041? Ne folosim de regula arătată mai sus:

$S_1 = 3 + 2 + 0 + 1 = 6$; $S_2 = 5 + 8 + 4 = 17$ şi $S_2 - S_1 = 11$ se împarte la 11.

În baza regulii, putem spune că numărul 3.528.041 se împarte negreşit la 11. Dacă vă veți da osteneala să faceți împărțirea, vă veți convinge că regula nu dă greş.

Nu va fi greu să aplicăm această regulă dacă vom observa în prealabil că numerele de felul 10 + 1, 100 - 1, 1.000 + 1, 10.000 - 1, 100.000 + 1 etc. se împart la 11. Să examinam mai întâi diferențele: 100 - 1 = 99, 10.000 - 1 = 9.999 etc; toate sunt alcătuite dintr-un număr par de 9 şi, prin urmare, se împart la 11. La 11 se

împart şi toate sumele de felul 10 + 1 = 11; 1.000 + 1 = 99 x 10 + 11; 100.000 + 1 = 9.999 x 10 + 11 etc, deoarece fiecare sumă se descompune în 2 termeni divizibili fiecare cu 11.

Să trecem acum la stabilirea regulii divizibilității cu 11. Să luăm un număr cu mai multe cifre, de exemplu: 3.516.282, şi să-l descompunem în felul următor: 2 + 8 x 10 + 2 x 100 + 6 x 1.000 + 1 x 10.000 + 5 x 100.000 + 3 x 1.000.000. Transformăm fiecare al doilea factor al înmulțirilor în aşa fel ca să obținem sume şi diferențe de tipul celor arătate mai sus, adică: 10 + 1, 100 - 1 etc. Vom obține: 3.516.282 = 2 + 8(10 + 1 - 1) + 2(100 - 1 + 1) + 6(1.000 + 1 – 1) + 1(10.000 – 1 + 1) + 5(100.000 + 1 - 1) + 3(1.000.000 – 1 + 1) = 2 + 8(10 + 1) - 8 + 2(100 - 1) + 2 + 6(1.000 + 1) - 6 + (10.000 - 1) + 1 + 5(100.000 + 1) - 5 + 3(1.000.000 - 1) + 3 = (2 - 8 + 2 - 6 + 1 – 5 + 3) + [8(10 + 1) + 2(100 - 1) + 6(1.000 + 1) + (10.000 - 1) + 5(100.000 + 1) + 3(1.000.000 - 1)].

Toți termenii închişi în paranteza mare se împart obligatoriu la 11. Prin urmare, divizibilitatea la 11 a numărului analizat depinde în întregime de divizibilitatea la 11 a numărului cuprins în paranteza mică: dacă acesta se împarte/nu se împarte la 11, atunci şi numărul analizat se împarte/nu se împarte la 11. în prima paranteză este însă scrisă diferența sumelor cifrelor numărului respectiv, adunate din 2 în 2; (2 + 2 + 1 + 3) - (8 + 6 + 5) = - 11. Deoarece această diferență, egală cu -11, se împarte la 11, înseamnă că şi numărul respectiv se împarte la 11. Dacă diferența sumelor cifrelor numărului analizat, adunate din 2 în 2, nu s-ar fi împărțit la 11, nici numărul respectiv nu s-ar fi împărțit la 11. Aşadar, exemplul analizat ne arată procedeul cu ajutorul căruia orice număr întreg ***N*** poate fi descompus în 2 termeni *(x şi y),* ***N*** *= x + y,* în aşa fel ca unul din ei *x* să se împartă negreşit la 11, iar celălalt y să reprezinte diferența sumelor cifrelor numărului dat, adunate din 2 în 2. E limpede că dacă cei doi termeni *x* şi *y* se împart la 11, atunci şi ***N*** se va împărți la 11; dacă însă *x* se împarte dar *y* nu se împarte la 11, atunci nici ***N*** nu se împarte la 11. Invers, dacă ***N*** şi *x* se împart la 11, atunci trebuie să se împartă la 11 şi *y;* dacă însă ***N*** nu se împarte la 11, iar *x* se împarte, atunci *y* nu se poate împărți la 11.

În felul acesta rezolvarea problemei divizibilității la 11 a unui număr cu mai multe cifre se reduce la constatarea divizibilității cu 11 a diferenței sumelor cifrelor numărului respectiv, adunate din 2 în 2, operație mult mai uşor de efectuat.

Rezolvați singuri încă un *rebus* aritmetic. Cum poate fi aflată repede cifra *a* care lipseşte în numărul de opt cifre $37a10201$, şi care este numărul cu care trebuie înlocuită literal în expresia $[11(492+x)]^2$ pentru ca egalitatea $[11(492+x)]^2 = 37a10201$ să fie corectă?

234. Regula comună a divizibilității cu 7, 11 şi 13

În tabelul numerelor prime, adică al numerelor care se împart numai la 1 şi la ele însele, numerele 7, 11 şi 13 sunt situate în acelaşi rând. Produsul lor este egal cu 7 x 11 x 13 = 1001 = 1000 + 1. Pentru moment reținem doar că 1000 + 1 se împarte la 7, la 11 şi la 13. Dacă vom înmulți cu 1001 orice număr cu 3 cifre, produsul se va scrie cu aceleaşi cifre ca şi deînmulțitul, repetate însă de două ori.

Fie $\overline{abc}$ un număr oarecare cu 3 cifre *(a, b* şi c sunt cifrele acestui număr). Să-l înmulțim cu 1001:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\times \\ 1001 \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ \hline \overline{abc}\,\overline{abc} \end{array}$$

Prin urmare, toate numerele de tipul *abcabc* se împart la 7, la 11 şi la 13. între altele se împarte la 7, 11 şi 13 numărul 999.999, adică 1.000.000 - 1.

Proprietățile indicate mai sus ne permit să reducem rezolvarea problemei divizibilității unui număr *cu mai multe cifre* la 7, 11 sau 13 la divizibilitatea cu aceste numere a unui alt număr format din numai *trei cifre.* Să presupunem că ni se cere să stabilim dacă numărul 42.623.295 se împarte la 7, 11 şi 13. Să despărțim acest număr de la dreapta la stânga în grupe de câte 3 cifre (ultimul grup din stânga poate să aibă mai puțin de 3 cifre). Să ne închipuim acum acest număr scris în felul următor: 42.623.295 = 295 + 623 x 1.000 + 42 x 1.000.000 sau (întocmai după cum am procedat atunci când am analizat regula divizibilității cu 11):

42.623.295 = 295 + 623(1.000 + 1 - 1) + 42(1.000.000 - 1 + 1) = (295 - 623 + 42) - [623(1000 + 1) + 42(1.000.000 - 1)].

Numărul din paranteza mare se împarte obligatoriu la 7, la 11 şi la 13. Prin urmare, divizibilitatea la 7, 11 şi 13 a numărului dat este determinată de divizibilitatea la aceste numere a numărului cuprins în paranteza mică. Considerând fiecare grup de câte 3 cifre (primul din stânga poate avea mai puțin de trei cifre) drept un număr independent, se poate enunța următoarea regulă comună a divizibilității unui număr cu mai multe cifre cu 7, 11 şi 13:

Dacă diferența sumelor grupelor numărului dat, adunate din 2 în 2, se împarte la 7, la 11 sau la 13, atunci şi numărul respectiv se împarte la 7, 11 sau 13.

Să ne întoarcem la numărul 42.623.295. Să stabilim la care din cei 3 divizori - 7, 11 sau 13 - se împarte diferența sumelor grupelor numărului dat: (295 + 42) - 623 = - 286. Numărul - 286 se împarte la 11 şi la 13, dar nu se împarte la 7. Prin urmare, numărul 42.623.295 se împarte la 11 şi la 13, dar nu se împarte la 7. Este evident că divizibilitatea cu 7, 11 şi 13 a numerelor cu 4, 5 şi 6 cifre, adică a numerelor care pot fi despărțite numai în 2 grupe (caz întâlnit foarte frecvent în practică) este determinată de divizibilitatea cu 7, 11 şi 13 a *diferenței* dintre grupele numărului respectiv. Astfel, de exemplu, e uşor de stabilit că 29.575 se împarte la 7 şi 13, dar nu se împarte la 11.

Într-adevăr diferența dintre cele două grupe este 575 - 29 = 546, iar numărul 546 se divide cu 7 şi 13, dar nu şi cu 11.

Problemă. Pentru stabilirea regulii comune a divizibilității cu 7, 11 şi 13, ne-am folosit de un număr care se despărțea în 3 grupe. Demonstrați valabilitatea aceste

reguli, folosind pentru exemplificare un număr care se desparte, de la dreapta spre stânga, în 4 grupe de câte 3 cifre.

235. Simplificarea regulii divizibilității cu 8

În şcoală se învață de obicei următoarea regulă de divizibilitate cu 8: dacă numărul format de ultimele 3 cifre ale numărului dat se împarte la 8, atunci se împarte la 8 numărul dat. Prin urmare, problema era redusă la, divizibilitatea cu 8 a unui număr de 3 cifre. Totodată nu se spune nici un cuvânt despre modul în care se poate afla repede dacă numărul de 3 cifre se împarte la 8. Este evident că nu întotdeauna se poate constata la prima vedere dacă un număr cu cifre este divizibil cu 8, aşa că de multe ori trebuie să facem efectiv operația de împărțire.

În mod firesc se pune întrebarea dacă nu cumva poate fi simplificată şi această regulă a divizibilității cu 8. Dacă o vom completa cu o regulă specială privind divizibilitatea cu 8 a unui număr de 3 cifre, ea va putea fi simplificată. Iată această regulă:

La 8 se împarte orice număr de 8 cifre la care numărul *de 2 cifre format din cifrele sutelor şi zecilor, adunat cu jumătatea numărului unităților, se împarte la 4.*

Exemplu. Fie numărul 592. Pentru a şti dacă el se împarte la 8, separăm cifra unităților şi adunăm jumătatea ei cu numărul format de cele 2 cifre anterioare - sutele şi zecile. Obținem: 59 + 1 = 60. Numărul 60 se împarte la 4, deci şi numărul 592 se împarte la 8. Demonstrați valabilitatea acestei reguli de împărțire cu 8 a unui număr cu 3 cifre şi formulați regula generală simplificată a divizibilității cu 8.

Nota 1. E limpede că un număr care se termină cu o cifră impară nu se va împărți cu 8.

Nota 2. în majoritatea covârşitoare a cazurilor, suma numărului de 2 cifre format de sute şi zeci cu jumătatea numărului unităților va da tot un număr de 2 cifre. Suma va fi de 3 cifre numai pentru numerele cuprinse între 984 şi 998, dar şi în acest caz nu este mai mare de 103; (99 + 4 = 103).

236. O memorie uimitoare

Spuneți prietenilor voştri că chiar dacă ei vor alege numai numere cu şase şi nouă cifre, divizibile cu 37, şi deşi numărul acestora este extrem de mare, le puteți demonstra că ştiți pe de rost toate numerele de acest fel. Pentru că efectul să fie şi mai puternic, spuneți-le că vă obligați să adăugați la orice număr de 3 cifre indicat de ei încă 3 sau chiar 6 cifre, în aşa fel ca numărul de şase sau nouă cifre format să se dividă la 37. Să presupunem că vi s-a dat numărul 412.

Scrieți fie în dreapta, fie în stânga lui numărul 143. Numărul rezultat va fi 143.412 sau 412.143; fiecare din ele se împarte la 37.

Fireşte, în cazul de față nu e vorba de o memorie fenomenală. Puteți avea o memorie obişnuită, cu condiția să cunoaşteți o regulă destul de simplă a divizibilității cu 37, regula pe care o indicăm mai jos. Despărțim numărul dat, *de la dreapta spre stânga,* în grupe de câte 3 cifre (ultimul grup din stânga poate avea mai puțin de trei cifre). Considerând fiecare grup ca un număr independent, adunăm aceste numere. Dacă suma obținută se împarte la 37, atunci se împarte şi întreg numărul dat. De

exemplu, numărul 153.217, se împarte la 37, deoarece 153 + 217 = 370 se împarte la 37.

Demonstrație:

- fie ***N*** un număr care se desparte în două grupe; să ni-l reprezentăm în forma următoare: ***N*** = 1.000a + *b,* în care *a* este numărul care alcătuieşte grupa din stânga, iar *b* - numărul de 3 cifre care alcătuieşte grupa din dreapta a numărului dat;

- dacă ***N*** se împarte la 37, atunci 1.000a + *b = 37 \k (k* fiind un număr întreg, pozitiv); să demonstrăm că în acest caz *a + b* se împarte de asemenea la 37; într-adevar, să-l aflăm pe *b* din prima egalitate şi să-l înlocuim în suma *a + b*

$\Rightarrow$ *a + b = a + (37k* - 1.000a) = 37*k* - 999a = 37*(k* - 27), care se împarte la 37. Invers, fie *a + b* care se împarte la 37; atunci *a + b = 37k.*

Să-l aflam pe *b* şi să-l înlocuim în egalitatea *N* = 1.000a + *b* $\Rightarrow$ *N* = 1.000a + 37*k* - a = 999a + *37k* = 37(27 + *k)* adică, *N* se divide cu 37.

Pentru numerele ce pot fi despărțite într-un număr mai mare de grupe, raționamentul este acelaşi. Prin urmare, secretul trucului constă în a adăuga, în mod iscusit, la numărul de 3 cifre dat de prieteni, încă un număr de 3 cifre (pentru obținerea unui număr cu 6 cifre) sau două numere cu 3 cifre (pentru un număr cu 9 cifre) alese în aşa fel ca suma numerelor adăugate plus numărul dat să se împartă la 37.

Cum putem şti ce numere trebuie adăugate? Foarte simplu. Adăugați, de exemplu, numere care adunate cu cel dat să dea un număr *cu trei cifre,* alcătuit din cifre *identice:* 111, 222, 333,..., 999, deoarece orice număr cu trei cifre alcătuit din cifre identice se împarte la 37. Dacă numărul dat a fost de exemplu 341, adăugați 103 (completarea până la 444) sau 214 (completarea până la 555) etc.

Asemenea completări sunt uşor de făcut în minte. în felul acesta veți putea rezolva foarte repede problema. Dacă vi se cere, dându-vi-se un număr cu trei cifre, să-l completați pe acesta formând un număr cu 9 cifre care să se împartă la 37, adăugați mai întâi 3 cifre oarecare, alese însă în aşa fel încât cu ajutorul a încă 3 cifre să puteți forma un număr alcătuit din trei cifre identice. Astfel, de exemplu, dacă vi s-a dat numărul 412 puteți adăuga la început numărul 101, pentru ca scriind apoi 042 suma de control să fie 555. Numărul rezultat va fi 412.101.042.

Pentru variație, nu uitați că puteți adăuga numerele de ambele părți ale numărului dat. Dacă numărul dat este alcătuit chiar el din cifre identice, de exemplu 333, e riscant să adăugăm un alt număr alcătuit din cifre identice, deoarece ne putem da uşor în vileag trucul.

Pentru a evita acest lucru adunați în minte 37 sau 74 la numărul pe care ați vrut să-l adăugați, sau, dimpotrivă, micşorati-l cu 37 sau 74. Puteți admite că inițial să vi se dea un număr cu 2 cifre sau chiar un număr monodrom (se numeşte monodrom sau simplu numărul cu o singură cifră). În acest caz adăugați mai întâi la numărul dat una sau 2 cifre oarecare până formați un număr cu trei cifre şi după aceea procedați ca mai sus.

Problemă. Demonstrați regula de divizibilitate cu 37 pentru un număr care se desparte în 3 grupe.

237. Regula comună a divizibilității cu 3, 7 şi 19

Produsul numerelor prime 3, 7 şi 19 este 399. Se constată următoarea proprietate interesantă: dacă numărul $100a + b$ (în care b este un număr cu 2 cifre, iar a orice număr întreg pozitiv) se împarte la 399 sau la oricare din factorii lui, atunci şi numărul $a + 4b$ se va împărți la aceste numere.

Demonstrați afirmația de mai sus. Formulați şi demonstrați teorema inversă. Pe baza celor demonstrate, stabiliți regula comună a divizibilității cu 3, 7 şi 19.

238. Lucruri vechi şi noi despre divizibilitatea cu 7

Numărul 7 i-a plăcut foarte mult poporului, care l-a folosit în multe cântece şi zicători:

Măsoară de 7 ori şi croieşte o dată.

Şapte vineri pe săptămână.

Copilul cu 7 doici rămâne fără ochi.

Unul la muncă, şapte la mâncare...

Numărul 7 se poate făli nu numai cu impresionantul său bagaj de zicători, ci şi cu diferite reguli de divizibilitate. Două din regulile divizibilității cu 7 (reguli comune cu cele ale altor cifre) le cunoaşteți din cele arătate până acum. Numărul 7 are însă şi câteva reguli individuale de divizibilitate. Pentru uzul propriu, alegeți-vă oricare vă va părea mai interesantă din regulile care urmează:

Prima regulă de divizibilitate cu 7. Pentru uşurarea înțelegerii să luăm mai întâi un exemplu: fie numărul 5236. Să scriem acest număr în felul următor: $10^3 - 5 + 10^2 - 2 + 10 - 3 + 6$ (aşa numita formă *sistematică* de scriere a numerelor), şi să înlocuim pretutindeni baza 10 cu baza 3: $3^3 - 5 + 3^2 - 2 + 3 - 3 + 6 = 168$.

Dacă numărul rezultat se împarte/nu se împarte la 7, atunci şi numărul dat se împarte/nu se împarte la 7.

În cazul de față 168 se împarte la 7, deci şi 5236 se împarte la 7.

Demonstrație: fie $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ cifrele - în ordine consecutivă - ale unui număr N cu m cifre; atunci: $N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1, + a_0$

$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3^2a_2 + 3a_1 + a_0$

Să scădem expresia a doua din prima:

$N - P = (10^{m-1} - 3^{m-1})a_{m-1} + (10^{m-2} - 3^{m-2})a_{m-2} + \ldots + (10^2 - 3^2)a_2 + (10 - 3)a_1$

Putem afirma că toate binoamele din paranteze se împart la $10 - 3 = 7$. Prin urmare, dacă scăzătorul P se împarte/nu se împarte la 7, atunci şi descăzutul N se împarte/nu se împarte la 7; de asemenea, dacă descăzutul N se împarte/nu se împarte la 7, atunci şi scăzătorul P se împarte/nu se împarte la 7.

O variantă a primei reguli de divizibilitate cu 7. Înmulțiți cu 3 prima cifra din stânga a numărului dat şi adunați cifra următoare; rezultatul înmulțiți-l cu 3 şi adunați cifra următoare ş.a.m.d. până la ultima cifră. Pentru simplificare, se admite ca după fiecare operație să se scadă din rezultatul obținut 7 sau un multiplu al lui 7. Dacă rezultatul final se împarte/nu se împarte la 7, atunci şi numărul dat se împarte/nu se împarte la 7.

Exemplu. Să vedem dacă numărul 48.916 se împarte la 7. Înmulțim prima cifră din stânga cu 3: $4 \times 3 = 12$. În vederea calculelor ulterioare, numărul 12 poate fi

înlocuit cu numărul 5, obținut prin micşorarea lui 12 cu 7. Înlocuind numărul *a* cu numărul *b,* care diferă de cel dintâi cu 7 unități sau cu un număr multiplu cu 7, vom pune între ele semnul ≡. Prima operație va fi deci scrisă în felul următor: 4 x 3 = 12 ≡5. Adunăm apoi la 5 cea de a doua cifră 8 şi scădem iarăşi şapte: 5 + 3 = 13 ≡6.
în continuare procedăm la fel:

6 x 3 = 18≡4, 4 + 9 = 13≡6, 6 x 3 = 18≡4, 4 + 1 = 5, 5 x 3 = 15≡1, 1 + 6 = 7. Rezultatul final este 7, prin urmare numărul 48.916 se împarte la 7.

Avantajul acestei reguli este că poate fi uşor folosită pentru calcule mintale. Să vedem acum care este demonstrația ei.

Este interesant că rezultatul final, micşorat cu 7 sau cu 14, indică restul împărțirii numărului dat *N* la 7. Verificați!

A doua regulă de divizibilitate cu 7. Şi de această dată vom proceda la fel ca la regula precedentă, cu singură deosebire că vom începe înmulțirea nu de la ultima cifră din stânga, ci de la ultima din dreapta şi o vom înmulți nu cu 3, ci cu 5.

Exemplu. Se împarte oare la 7 numărul 37.184?

4 x 5 = 20≡*6,* 6 + 8 = 14≡0, 0 x 5 = 0, 0 + 1 = 1, 1 x 5 = 5; se poate sări peste adunarea cifrei 7; 5 x 5 = 25≡4, 4 + 3 = 7≡0. Deci, numărul 37.184 se împarte la 7.

A treia regulă de divizibilitate cu 7. Această regulă este mai greu de folosit în calcule mintale, dar este şi ea foarte interesantă. Dublați ultima cifră şi scădeți a doua din dreapta, dublați rezultatul şi adunați a treia din dreapta etc, alternând scăderea cu adunarea şi, acolo unde este posibil, micşorând de fiecare dată rezultatul cu 7 sau cu un multiplu al acestui număr. Dacă rezultatui final se împarte/nu se împarte la 7, atunci şi numărul dat se împarte/nu se împarte la 7.

Verificați această regulă în practică, iar cine doreşte să încerce să o demonstreze. Pentru numerele de form generală demonstrația este, ce-i drept, cam dificilă; de aceea, folosiți un număr cu patru sau cinci cifre.

Teorema 1. Dacă un număr oarecare cu două cifre se împarte la 7, atunci se împarte la 7 şi numărul invers, mărit cu cifra zecilor numărului dat.

De exemplu: 14 se împarte la 7; prin urmare împarte la 7 şi numărul 41 + 1 = 42.

Teorema 2. Dacă un număr oarecare cu trei cifre se împarte la 7, atunci se împarte la 7 şi numărul invers micşorat cu diferența dintre cifrele unităților şi sutelor numărului dat.

Exemplul 1: numărul 126 se împarte la 7; prin urmare se împarte la 7 şi numărul 621 - (6 - 1) = 616.

Exemplul 2: numărul 693 se împarte la 7; prin urmare se împarte la 7 şi numărul 396 - (3 - 6) = 399.

Teorema 3. Dacă suma cifrelor unui număr cu trei cifre este egală cu 7, el se împarte la 7 numai cu condiția ca cifrele zecilor şi unităților să fie identice. Reciproc, dacă suma cifrelor unui număr cu trei cifre este egală cu 7, iar cifrele zecilor şi unităților sunt identice, numărul respectiv se împarte la 7.

Capitolul 7 Matematica aproape fără calcule

Rezolvarea oricărei probleme se bazează mai mult sau mai puțin pe „raționamente". Sunt însă multe probleme, extrem de atrăgătoare, în care rolul hotărâtor îl joacă construirea corectă a unui întreg lanț de raționamente precise, uneori foarte subtile. Unele din ele sunt mai curând probleme de logică decât de matematică, dar şi aceastea contribuie la dezvoltarea „gândirii matematice", ne învață „să gândim şi să analizăm", să căutăm căi pentru rezolvarea lor.

239. Într-o cameră întunecoasă

Am intrat în cameră ca să iau din dulap pantofii şi şosetele. în cameră dormea sora mea şi era întuneric. Ştiam bine în ce loc din dulap se află cele 3 perechi de pantofi - toate de diferite modele - şi cele 12 perechi de ciorapi - negri şi maro. N-am vrut să aprind lumina, ca să nu-mi trezesc surioara. Într-adevăr, atât pantofii cât şi ciorapii se aflau la locul lor, dar trebuie să recunosc că în dulap nu prea era ordine! Cei 6 pantofi erau amestecați, iar cei 24 ciorapi erau adunați într-un maldăr. Câți pantofi şi câți ciorapi (minimum posibil) trebuie să scot din dulap, ca printre ei să am în mod sigur o pereche de pantofi la fel şi o pereche de şosete de aceeaşi culoare?

240. Merele

Într-o ladă au fost amestecate mere de 3 soiuri. Care este cel mai mic număr de mere scoase la întâmplare din ladă, pentru ca printre ele să se găsească:

1) cel puțin 2 mere din acelaşi soi;

2) cel puțin 3 mere din acelaşi soi?

244. Pronosticul timpului

Dacă la 12 noaptea plouă, credeți că peste 72 de ore o să fie timp frumos, cu soare?

241. Ziua pădurii

De *Ziua pădurii* două clase de elevi, a 4-a şi a 6-a, ale şcolii noastre, au avut sarcina să planteze, de ambele părți ale străzii, un număr egal de arbori. Ca să nu se facă de râs în fața elevilor clasei a 6-a, elevii din clasa a 4-a au ieşit mai devreme pe teren şi au reuşit să planteze 5 puieți înainte ca să fi venit cei din clasa a 6-a, dar, spre mâhnirea lor, au aflat că n-au plantat puieții pe trotuarul ce le era destinat. Bineînțeles, elevii clasei a 4-a au trebuit să treacă de cealaltă parte a străzii şi s-o ia de la capăt. Cei din clasa a 6-a, au terminat, fireşte primii. Atunci conducătorii claselor le-au propus:

- Băieți, hai să-i ajutăm pe cei din clasa a 4-a!

Toți copiii au fost de acord cu această propunere. Elevii au trecut pe celălalt trotuar, au plantat 5 puieți, deci şi-au plătit datoria, şi au mai avut timpul să planteze încă 5 puieți până la terminarea lucrului.

- Deşi a-ți fost aici înaintea noastră, totuşi v-am întrecut, - rosti un elev dintr-a 6-a, adresându-se celor dintr-a 4-a.

- Nu vă mai lăudați atâta, ca n-ați pus decât cu 5 puieți mai mult ca noi, - le-a răspuns cineva.

- Nu, nu cu 5, ci cu 10, îi răspunseră cei dintr-a 6-a.

S-a încins o discuție pasionată. Unii ziceau cu „5" alții - cu „10". În cele din urmă, desigur că adevărul a fost stabilit, dar discuția a durat destul de mult. Cine avea dreptate?

242. Care este prenumele şi vârsta?

- Băieți, mâine dimineață în tabăra noastră de elevi vor sosi 3 băieți pe care nu-i cunoaşteți: Burov, Gridnev şi Klimenko, - spuse instructorul, adresându-se unui grup de elevi din clasele celor mari. Pot să vă spun şi pronumele acestor băieți. Ei se numesc: Colea, Petea şi Grisă.

- Dar care dintre ei este Burov, care este Gridnev şi care este Klimenko?

- Să ghicim, - propuse unul din băieți.

- Cred că Burov este numele lui Colea, - spuse unul din ei.

- Nu, n-ai ghicit, - răspunse instructorul.

De altfel, nu trebuie să încercați la noroc. Pe baza puținelor informații pe care vi le voi da acum, puteți stabili precis nu numai pronumele lui Burov, Gridnev şi Klimenko, ci şi vârsta fiecăruia. Propunerea părea atrăgătoare şi a fost acceptată cu plăcere.

- La cele ce ştiți despre băieții care trebuie să sosească voi mai adăuga doar următoarele:

1) Tatăl Nadiei Serova, pe care o cunoaşteți bine, este fratele mamei lui Buro.

2) Petea a intrat la şcoală la vârsta de 7 ani şi învață bine. în scrisoarea pe care am primit-o recent de la el, îmi scrie următoarele: „...în sfârşit, anul acesta voi învăța algebră, geometrie şi fizică..." Trebuie să mai adaug că prisăcarul nostru, Semion Zaharovici Mokrousov este bunicul lui Petea şi îşi aşteaptă nepotul cu nerăbdare.

3) Gridnev este cu un an mai mare decât Petea.

4) Grisă este cu un an mai mare decât Petea.

- Atâta tot?

- Da, nimic mai mult!

- Nu cumva cunoaştem prea puține date despre aceşti băieți? - spuse cineva.

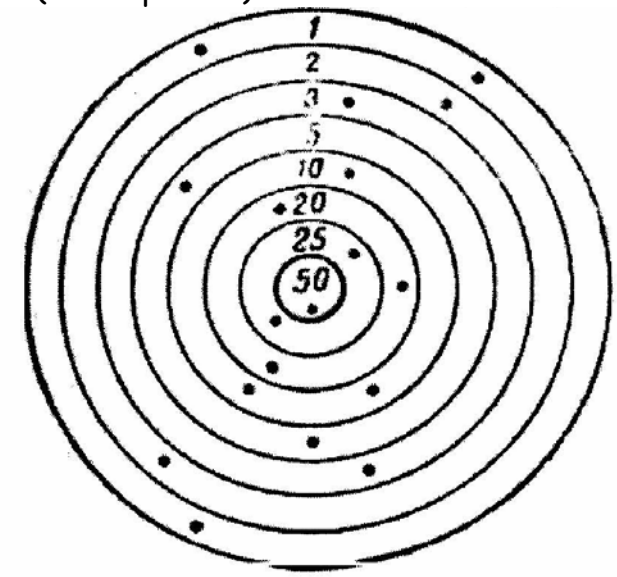
- Absolut suficiente pentru a rezolva problema.

După scurte discuții, raționamente şi comparații, copiii au găsit singura soluție posibilă şi au stabilit exact pronumele şi vârsta noilor lor prieteni: Burov, Gridnev şi Klimenko.

243. Întrecere la tir

Trei băieți - Andrei, Boris şi Vladimir - au tras cu arme de calibru redus la țintă înfățişată mai jos. Fiecare băiat a tras 6 focuri. Locurile unde au nimerit ținta sunt indicate prin puncte. După numărătoarea punctelor s-a constatat că băieții

obținuseră fiecare câte 71 de puncte. Din cele 18 lovituri numai una a nimerit în cercul central al țintei (50 de puncte).



Eu am uitat numele băiatului care a tras acest foc reuşit, dar voi îl puteți afla pe baza următoarelor date: primele 2 lovituri i-au adus lui Andrei 22 de puncte; lui Vladimir prima lovitură i-a adus numai 3 puncte. Care băiat a nimerit în cercul central al țintei?

244. O cumpărătură

O fetiță a cumpărat 42 creioane dintr-o librărie. Ea a luat 15 creioane obişnuite - a 16 copeici bucata, 7 creioane colorate - a 28 copeici bucata, 12 creioane pentru desen tehnic şi 8 creioane chimice. Vânzătorul i-a făcut un bon de 8 ruble şi 90 copeici.

Fetița nu a reținut prețul creioanelor chimice şi al creioanelor pentru desen tehnic, dar cunoştea numărul lor şi de aceea a văzut imediat că bonul este greşit, şi i-a atras atenția vânzătorului. Acesta a verificat socoteala, şi-a cerut scuze şi a corectat bonul.

Cum a observat fetița greşeala vânzătorului? (1 rublă = 100 copeici)

245. Pasagerii dintr-un compartiment

În compartimentul unui vagon din trenul Moscova - Odessa se aflau un cetățean din Moscova, unul din Leningrad, unul din Tuia, unul din Kiev, unul din Harkov şi unul din Odessa. Numele lor începeau cu literele A, B, C, D, E, F. În timpul călătoriei s-a aflat că A şi călătorul din Moscova sunt medici, că E şi cel din Leningrad sunt profesori, iar cel din Tuia şi C sunt ingineri. B şi F au luat parte la Războiul pentru Apărarea Patriei, iar cel din Tuia n-a făcut serviciul militar.

Călătorul din Harkov este mai în vârstă decât A, cel din Odessa este mai în vârstă decât C. B şi călătorul din Moscova au coborât la Kiev, iar C şi cel din Harkov au coborât la Vinița. Stabiliți profesiunea fiecăruia dintre aceşti 6 pasageri şi oraşul în care domiciliază.

Observație. Este interesantă şi problema stabilirii numărului minim de date necesare pentru rezolvarea problemei de mai sus. Nu cumva una din ele este de prisos?

246. Finala turneului şahiştilor din Armata Sovietică

În finala turneului şahiştilor din Armata Sovietică s-au întâlnit 8 militari cu grade diferite: un colonel, un maior, un căpitan, un locotenent, un plutonier, un sergent, un fruntaş şi un soldat. Toți erau din diferite arme: unul era infanterist, altul aviator, altul tanchist, artilerist, cavalerist, aruncător de mine, genist şi transmisionist. Raționând corect, veți putea stabili specialitatea militară a celor 8 jucători de şah, pe baza următoarelor date:

În runda întâi colonelul a jucat cu cavaleristul. Aviatorul a sosit abia după terminarea primei runde.

În runda a doua infanteristul a jucat cu fruntaşul, iar maiorul cu plutonierul. După runda a doua căpitanul s-a retras din turneu, fiind bolnav.

Din această cauză au fost liberi: în runda a treia sergentul, în runda a patra tanchistul şi în runda a cincea maiorul.

În runda a treia locotenentul a câştigat cu infanteristul, iar partida dintre colonel şi artilerist s-a terminat remiză.

În runda a patra genistul a câştigat cu locotenentul, iar plutonierul cu colonelul, înaintea ultimei runde s-a jucat partida întreruptă dintre cavalerist şi aruncătorul de mine, restanța din runda a şasea.

Notă. 1) Pentru rezolvarea acestei probleme nu trebuie să ştiți să jucați şah. Trebuie să ştiți numai că în turneu un şahist nu e liber decât o singură dată şi că joacă o partidă cu fiecare partener.

2) Pe baza soluției obținute, cei care doresc pot să întocmească chiar un tabel al meciurilor din fiecare rundă.

247. Muncă voluntară

Înainte de începerea anului şcolar, sătenii au organizat într-o duminică muncă voluntară pentru pregătirea lemnelor necesare şcolii. Şase săteni au început să taie buştenii, care erau de diferite lungimi, în bucăți de jumătate de metru. Ei se împărțiseră în trei perechi, şi în fiecare pereche unul era şef de echipă. Aceştia se numeau Volodea, Petea şi Vasea. Volodea şi Misa tăiau buşteni de 2 m, care aveau o grosime mijlocie. Petea şi Costea tăiau buşteni de 1,5 m, ceva mai groşi decât cei de 2 m. Vasea şi Fedea tăiau buşteni de 1 m, foarte groşi. A doua zi, gazeta de perete a şcolii a lăudat cele trei echipe de tăietori de lemne, conduse de Lavrov, Galkin şi Medvedev. S-a arătat că Lavrov şi Kotov au tăiat 26 de bucăți, Galkin şi Pastuhov - 27 bucăți, Medvedev şi Evdokimov - 28 bucăți. Care este pronumele lui Pastuhov?

248. Care este numele mecanicului?

În trenul Moscova - Leningrad călătoresc pasagerii Ivanov, Petrov şi Şidorov. Mecanicul, fochistul şi conductorul trenului au şi ei aceleaşi nume. Se ştie că:

1) pasagerul Ivanov locuieşte la Moscova;

2) conductorul locuieşte într-o localitate situată la jumătatea drumului dintre Moscova şi Leningrad;

3) pasagerul care are acelaşi nume cu conductorul locuieşte la Leningrad;

4) pasagerul care locuieşte mai aproape decât ceilalți pasageri de localitatea unde domiciliază conductorul câştigă lunar exact de 3 ori mai mult decât conductorul;

5) pasagerul Petrov câştigă 2.000 ruble pe lună;

6) Şidorov (cel care face parte din personalul trenului) a câştigat de curând o partidă de biliard jucată cu fochistul.

Care este numele mecanicului?

249. Un caz penal

Profesoarei unei şcoli elementare din statul New York i s-a furat portmoneul. El n-a putut fi furat decât de unul din următorii 5 elevi: Lilian, Judith, David, Theo sau Margaret. La interogarea acestor copii, fiecare a dat 3 răspunsuri:

Lilian: 1) n-am furat portmoneul;

2) n-am furat niciodată nimic în viața mea;

3) aceasta este treaba lui Theo.

Judith: 4) n-am furat portmoneul;

5) tatăl meu este destul de bogat şi am un portmoneu al meu;

6) Margaret ştie cine l-a furat.

David: 7) n-am furat portmoneul;

8) pe Margaret n-am cunoscut-o înainte de a veni la şcoală;

9) aceasta e opera lui Theo.

Theo: 10) nu sunt vinovat;

11) Margaret a furat portmoneul;

12) Lilian minte spunând că eu am furat portmoneul.

Margaret: 13) eu n-am furat portmoneul profesoarei;

14) Judith a făcut-o;

15) David poate să garanteze pentru mine, căci ne cunoaştem de când eram copii mici.

Fiind interogați încă o dată, fiecare a recunoscut că din cele trei răspunsuri date, două sunt adevărate şi unul nu. Aflați care este elevul vinovat de furtul portmoneului profesoarei?

250. Culegătorii de plante medicinale

Vara, în timpul unei excursii, două echipe de elevi au cules plante medicinale de acelaşi soi. Pentru plantele strânse, direcția de aprovizionare a farmaciilor le-a plătit o sumă de bani, partea cea mai mare revenind primei echipe, căci elevii unei echipe au cules mai multe plante decât elevii celeilalte echipe. Dacă, în afară de suma totală, plătită de direcția aprovizionării, se ştie şi câte kilograme de plante a adunat fiecare echipă, împărțirea banilor nu constituie o problemă grea. Dar băieții au cifrat toate operațiile aritmetice. Ei au înlocuit toate cifrele cu o steluță - afară de cifra 7 -şi vă roagă să reconstituiți operațiile. Iată aceste operații cifrate:

1) Ce cantitate de plante a fost strânsă?

```
 * +
 *
---
**
```

2) Câte ruble costă un kilogram de plante?

```
***  | *7
**   | --
--   | **
 **  |
 **  |
-----|
 ==  |
```

3) Ce sumă de bani revine primei echipe?

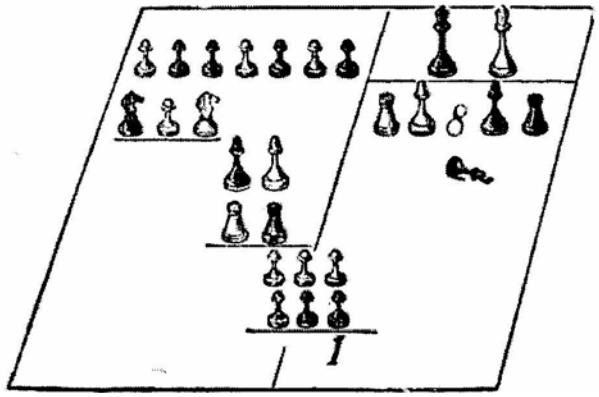
```
 ** ×
  *
----
 **
```

4) Ce sumă de bani revine celei de-a doua echipe?

```
 ** ×
  *
----
 **
```

251. Împărțirea cifrată

La o măsuță din sala de jocuri a clubului se dădea o bătălie tăcută între doi tineri jucători de şah. La o măsuță alăturată şedea Olga - redactoarea gazetei matematice de perete cu titlul „Raționează!". Ea lucra la o problemă pentru viitorul număr al gazetei. După ce a terminat împărțirea unui număr de 7 cifre cu un număr de 2 cifre, Olga puse deoparte foaia de hârtie pe care făcuse calculele şi începu să lucreze la un desen. Atunci şahiştii noştri, fără să-şi întrerupă partida, au început să se distreze acoperind cifrele de pe foaia de hârtie cu figuri de şah, luate la întâmplare din cutie. La terminarea partidei toate cifrele deîmpărțitului, împărțitorului, catului şi ale tuturor operațiilor şi resturile intermediare, afară de ultimul, egal cu 1, erau acoperite cu figuri de şah.



- Olga, uite o problemă pentru gazetă, - spuse unul din şahişti. Desenează sau fotografiază această împărțire a figurilor şi cere cititorilor să găsească toate cifrele, acoperite de figuri.

- Într-adevăr, problema este interesantă - se bucură Olga. Să ne gândim însă mai întâi dacă problema noastră poate fi soluționată. După o scurtă chibzuială, băieții au ajuns la concluzia că, prezentată în felul acesta, problema nu prea este atrăgătoare, căci comportă mai multe soluții. Dar dacă vor scoate piesa care acoperă cifra de la mijiocul catului (cifra fiind 8), problema devine precisă şi nu are decât o singură soluție.

252. Operații cifrate (rebusuri cu numere)

Toate operațiile aritmetice de mai jos sunt cifrate, cifrele lipsă fiind înlocuite prin litere sau steluțe. Cifrele identice au fost înlocuite prin aceleaşi litere, iar cifrele diferite au fost înlocuite prin litere diferite; steluțele înlocuiesc atât cifre identice, cât şi cifre diferite. Fiecare rebus poate fi descifrat prin raționamente succesive. Se cere să puneți în locul literelor şi steluțelor cifrele lipsă.

Primul rebus

$$\begin{array}{r} ABC \times \\ BAC \\ \hline **** \\ **A \\ ***B \\ \hline ****** \end{array}$$

Al doilea rebus

$$\begin{array}{r} *** \times \\ *2* \\ \hline *** \\ **** \\ *8* \\ \hline **9*2* \end{array}$$

Al treilea rebus

$$\begin{array}{r|l} MYXA & XA \\ \hline XA & \\ \hline XX & \\ AD & \\ \hline YXA & \\ YXA & \\ \hline = & \end{array}$$

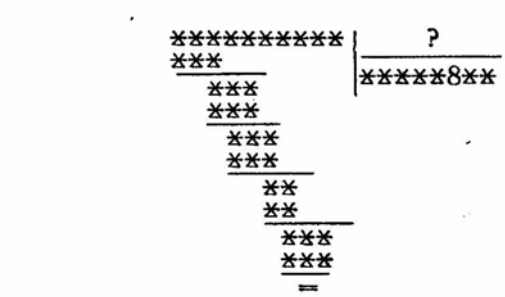
Al patrulea rebus

$$\begin{array}{r|l} **7******** & ****7* \\ \hline ****** & **7** \\ ****77* & \\ ******** & \\ \hline *7**** & \\ *7**** & \\ \hline ******** & \\ ****7** & \\ \hline ****** & \\ ****** & \end{array}$$

Al cincelea rebus
(comportă patru soluții)

$$\begin{array}{r|l} *******4 & *** \\ \hline *** & *4** \\ \hline **4* & \\ **** & \\ \hline **** & \\ *4* & \\ \hline **** & \\ **** & \\ \hline = & \end{array}$$

Al şaselea rebus. Acest rebus este mai greu de rezolvat, deoarece nu se cunoaşte nici măcar numărul cifrelor împărțitorului. Totuşi el are o singură soluție. Căutați-o!



Al şaptelea rebus (comportă 2 soluţii)

$$\begin{aligned} DO + RE &= MI \\ FA + SI &= SA \\ RE + SI + LA &= SOL \end{aligned}$$

Al optulea rebus (comportă mai multe soluţii)

$$\begin{array}{r} FOT + \\ BAL \\ \hline SUT \end{array}$$

Al nouălea rebus

$$\begin{array}{r} ATOM \times \\ ATOM \\ \hline \star\star\star\star\star \\ \star\star\star\star\star \\ \star\star\star\star\star \\ \star\star\star\star\star \\ \hline \star\star\star\star ATOM \end{array}$$

253. Mozaic aritmetic

Mozaicul de litere şi semne matematice, redat mai jos, reprezintă două interesante rebusuri aritmetice, care pot fi rezolvate nu potrivind cifrele pe ghicite, ci urmând un raţionament logic.

Primul rebus

$$\begin{array}{rcl} ATU + ZAL = IZYE \\ - \quad - \quad : \\ NEK : ZOK = \dot{E} \\ \hline PAU - NL = PPA \end{array}$$

Al doilea rebus

$$\begin{array}{rcl} KEB + EUS = LFS \\ - \quad + \quad : \\ WUB : EK = \dot{U}S \\ \hline EKB - ESU = RA \end{array}$$

Ca şi în rebusurile precedente, literele înlocuiesc cifre. Literelor diferite le corespund şi cifre diferite. între numerele cifrate sunt puse semnele aritmetice, care indică operaţiile: pe verticală - de sus în jos, pe orizontală - de la stânga la dreapta. Rezultatul operaţiilor pe verticală se notează tot pe verticală, sub linie, iar rezultatul operaţiei pe orizontală se notează pe aceeaşi orizontală după semnul egalităţii. înlocuiţi literele cu cifre, în aşa fel ca să puteţi efectua exact toate operaţiile indicate.

După ce veţi stabili valoarea numerică a fiecărei litere, aranjaţi literele în ordinea valorii lor minime (între 0 şi 9). Veţi obţine câte un cuvânt de fiecare rebus: în primul va fi un cuvânt rusesc, în al doilea unul în limba germană. Primul cuvânt este un termen de matematică; al doilea cuvânt semnifică un pas important în viaţa fiecărui om.

254. Motociclistul şi călăreţul

Oficiul poştal a trimis la aerodrom un motociclist ca să preia corespondenţa sosită cu avionul, în ziua aceea avionul a sosit înainte de ora stabilită şi corespondenţa a fost trimisă oficiului cu un călăreţ. După ce a mers o jumătate de

oră, călărețul l-a întâlnit pe motociclist, care a preluat sacul cu corespondență şi a făcut imediat cale-ntoarsă. Motociclistul a ajuns la oficiu cu 20 de minute înainte de ora la care era aşteptat.

Cu câte minute înainte de ora fixată a sosit avionul?

255. Pe jos şi cu automobilul

Celor care au înțeles modul în care se rezolvă problema precedentă le va fi lesne să soluționeze următoarea problemă similară. Un inginer care lucrează la o uzină afară din oraş soseşte în fiecare zi în gara din localitatea respectivă la ora 8 şi 30 de minute. Exact în aceeaşi clipă vine la gară un automobil Pobeda, care îl duce neîntârziat la uzină. Într-o zi, inginerul a sosit la ora 8 şi, fără să mai: aştepte automobilul, a pornit pe jos spre uzină. Întâlnind în drum maşina, el s-a urcat în ea şi a ajuns la uzină cu 10 minute mai devreme ca de obicei.

La ce oră a întâlnit inginerul maşina şi de câte ori a mers mai încet pe jos decât cu automobilul?

256. Pornind de la contrariu

Să presupunem că există două afirmații *A* şi *B* care se exclud reciproc. Desigur că numai una din ele este justă. Să mai presupunem că trebuie demonstrată justețea afirmației *A.* Uneori, în loc să se demonstreze direct că afirmația *A* este cea justă, se apelează la o demonstrație indirectă, adică se arată că afirmația contrară *B* este nejustăa, căci vine în contradicție cu date certe. Această metodă de raționament se numeşte *demonstrarea contrariului* şi este foarte mult folosită în geometrie, în cursul şcolar de algebră şi câteodată în aritmetică. Dar ea poate fi folosită cu succes nu numai pentru demonstrarea teoremelor, ci şi pentru rezolvarea problemelor.

Să examinăm aplicarea metodei raționamentelor care pornesc de la contrariu, în cazul următoarei probleme: „suma a două numere este 75; primul număr este mai mare cu 15 unități decât al doilea; să demonstrăm, folosind metoda amintită, că al doilea număr este 30."

Rezolvarea. Să presupunem că al doilea număr nu este egal cu 30. în acest caz el este fie mai mare, fie mai mic decât 30. Dar dacă al doilea număr este mai mare decât 30, atunci primul număr este mai mare decât 45 şi suma lor va fi mai mare decât 75, ceea ce contrazice enunțul. Dacă însă al doilea număr este mai mic decât 30, ştim că primul este mai mic decât 45, iar suma lor este mai mică decât 75, ceea ce din nou contravine enunțului. Prin urmare, al doilea număr este 30.

Rezolvați următoarele două probleme cu ajutorul raționamentului, pornind de la contrariu:

Problema 1. Produsul a două numere întregi este mai mare decât 75. Să se demonstreze că măcar unul din factori este mai mare decât 8.

Problema 2. Produsul înmulțirii cu 5 a unui număr cu două cifre este de asemenea un număr cu două cifre. Să se demonstreze că prima cifră a deînmulțitului este 1.

257. Să se găsească moneda falsă

Este puțin probabil că în viață va fi necesar să căutăm o monedă falsă printre alte monede de acelaşi fel, cu ajutorul unui cântar fără greutăți; dar, pentru a ne antrena gândirea, să acceptăm aceste condiții inițiale şi să rezolvăm numai cu ajutorul raționamentului următoarele trei probleme:

Problema 1 (uşoară). Se dau 9 monede de aceeaşi valoare. Se ştie că 8 au aceeaşi greutate, iar cea falsă este ceva mai uşoară. Se cere să stabilim prin două cântăriri, fără greutăți, care este moneda falsă.

Problema 2 (ceva mai grea). Condițiile fiind aceleaşi, se cere să găsim moneda falsă (mai uşoară) din 8 monede de aceeaşi valoare.

Problema 3 (grea). între 12 monede există una falsă. Se ştie că moneda falsă nu are aceeaşi greutate ca cele veritabile, dar nu se precizează dacă este mai uşoară sau mai grea. Monedele veritabile au toate aceeaşi greutate. Se cere ca prin 3 cântăriri, fără greutăți, să se găsească moneda falsă şi să se stabilească totodată dacă este mai uşoară sau mai grea decât celelalte.

Problema 4. Au fost confecționate 13 piese identice, care trebuie să aibă aceeaşi greutate. E posibil însă ca printre ele să se afle o piesă (numai una singură) a cărei greutate să difere de greutatea celorlalte. Se cere ca prin 3 cântăriri pe un cântar cu talere să se stabilească dacă printre piesele date există una care nu corespunde standardului, iar în cazul în care există, să se răspundă dacă este mai uşoară sau mai grea decât piesa - standard. Cântarul nu are greutăți; în schimb se dă o piesă suplimentară (a 14-a), care are greutatea standard şi care poate fi folosită cu prilejul cântăririi.

Problema 5. Să generalizăm problema precedentă. Condițiile rămân aceleaşi, dar numărul pieselor ce urmează a fi controlate este egal cu $\frac{3n-1}{2}$ şi se admite efectuarea de *n* cântăriri (n = 1, 2, 3 ...).

258. O remiză logică

La concursul amatorilor de probleme şi şarade, 3 concurenți s-au remarcat în mod special. Pentru a stabili învingătorul s-a decis să li se mai dea o problemă. Li s-au arătat 5 bucățele de hârtie: 3 albe şi 2 negre. Apoi, cei trei concurenți au fost legați la,ochi şi fiecăruia i s-a lipit pe frunte o hârtiuță albă, iar cele negre au fost distruse. După aceasta, legăturile au fost scoase şi s-a anunțat că va învinge cel care va stabili primul culoarea hârtiuței care i-a fost lipită pe frunte.

Niciunul din cei trei concurenți nu putea să vadă culoarea hârtiuței lipite pe fruntea sa, în schimb vedea hârtiuțele albe de pe fruntea celorlalți doi. După un timp de gândire, toți trei au ajuns concomitent la concluzia că au pe frunte o hârtiuță albă ceea ce a determinat juriul să declare remiză.

Cum au raționat cei trei concurenți?

259. 3 înțelepți

Obosiți de discuții şi moleşiți de căldura verii, trei filozofi din Grecia Antică s-au culcat sub un copac din grădina Academiei şi au adormit. în timp ce dormeau, un

glumeț îi mânji pe frunte cu cărbune. Când s-au trezit şi s-au privit, toți trei s-au veselit şi au început să râdă cu poftă. Niciunul nu era neliniştit, căci fiecăruia i se părea firesc ca el, împreună cu alt înțelept, să râdă de al treilea. La un moment dat unul din ei a încetat să râdă, căci şi-a dat seama că şi el este murdar pe frunte.

Cum a raționat el?

260. 5 întrebări pentru şcolari

O formulare matematică trebuie să fie completă, dar să nu aibă cuvinte inutile. Conciziunea şi precizia limbajului matematic constituie o trăsătură distinctivă şi în acelaşi timp frumoasă a acestui limbaj.

1) Indicați cuvintele inutile în următoarele propoziții matematice bine cunoscute:

a) suma celor două unghiuri ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este de 90°;

b) dacă cateta unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătatea ipotenuzei, atunci unghiul ascuțit opus ei este de 30°.

2) Folosind termenii matematici corespunzători, să simplificăm următoarele fraze:

a) partea din secantă, cuprinsă în interiorul circumferinței;

b) poligon cu cel mai mic număr de laturi;

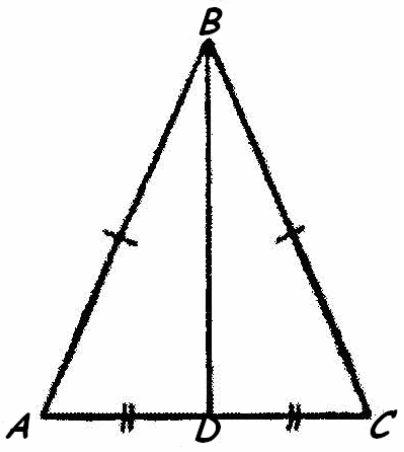
c) coarda care trece prin centrul circumferinței;

d) un triunghi isoscel a cărui bază este egală cu latura;

e) două circumferințe cu raze diferite, care au acelaşi centru.

3) Iată 7 termeni înrudiți: paralelogram, figură geometrică, pătrat, poligon, figură plană, romb, patrulater convex. Aşezați aceste cuvinte succesiv, în aşa fel ca noțiunea exprimată printr-un cuvânt să cuprindă noțiunea exprimată prin cuvântul care-i urmează.

4) În triunghiul ABC, AB = BC, AD = DC. Găsiți cel puțin 5 termeni care să caracterizeze segmentul BD.



5) Ştiind că suma tuturor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex este egală cu patru unghiuri drepte, răspundeți care este numărul maxim al unghiurilor ascuțite interne pe care le poate avea un poligon convex.

261. Raţionamente în loc de ecuaţii

Oricine a învăţat puţină matematică, cunoaşte diferite procedee aritmetice, algebrice sau ale altor capitole din matematică, cu ajutorul cărora poate rezolva o problemă. Fireşte, există şi probleme ce nu vor putea fi rezolvate de un om care nu cunoaşte algebră, după cum există şi probleme de la care nu trebuie să se dea în lături nici chiar cei care nu ştiu să scrie şi să rezolve o ecuaţie.

Aici îi poate ajuta bunul simţ, spiritul de observaţie şi raţionamentul. Vă propunem să rezolvaţi prin raţionament următoarele probleme:

Problema 1. Dacă un număr cu 2 cifre va fi citit de la dreapta la stânga, numărul invers va fi de 4 ori şi jumătate mai mare decât numărul dat. Care este numărul? Enunţul problemei cuprinde puţine date, dar folosindu-le judicios problema poate fi rezolvată numai cu ajutorul raţionamentelor, după cum urmează:

a) Numărul căutat este mai mare decât 10, căci are 2 cifre

b) El este însă mai mic decât 25, căci 25 înmulţit cu 4,5 ne dă un număr cu 3 cifre

c) Numărul căutat este cu soţ, căci înmulţindu-l cu 4,5 obţinem un număr întreg

d) Potrivit enunţului, numărul invers este de 9 ori mai mare decât jumătatea acestui număr, deci numărul invers este divizibil cu 9

e) Dat fiind că numărul invers este divizibil cu 9, suma cifrelor lui se împarte cu 9; numărul dat având aceleaşi cifre ca şi numărul invers, este şi el divizibil cu 9. Căutaţi continuarea acestor raţionamente şi rezolvaţi problema.

Problema 2. Produsul a 4 numere consecutive întregi este 3024. Să se găsească aceste numere. Pentru rezolvarea „logică" a problemei, putem propune următoarea schemă de raţionamente:

a) Se va stabili că printre numerele căutate nu există numărul 10

b) Numerele căutate trebuie să fie ori mai mari ca 10, ori mai mici

c) Din raţionamentele anterioare şi din enunţul problemei rezultă că toate numerele căutate sunt mai mici de 10, adică sunt cu o singură cifră

d) Se va stabili că printre numerele căutate nu există numărul 5

e) Toate celelalte numere cu o singură cifră se vor împărţi în două grupe (mai mari ca 5 şi mai mici ca 5) şi se va stabili grupul care satisface condiţiile problemei.

262. Pe baza bunului simţ

Olga, studentă la Institutul Pedagogic, se pregăteşte să predea „lecţia de probă" la matematică în clasa a 8-a a Şcolii medii.

- Olga, arată-mi te rog problemele pe care vrei să le dai elevilor, - spuse tatăl ei, un mecanic priceput.

„Vârsta unui copil, mărită cu 3 ani, dă un număr din care se extrage exact rădăcina pătrată; dacă vom extrage-o vom obţine vârsta copilului, micşorată cu 3 ani. Câţi ani are copilul?"

- Da, problema este destul de reuşită pentru exerciţii mintale. Băieţii mai iscusiţi o vor rezolva într-un minut.

- Cum aşa? De ce crezi că o vor rezolva într-un minut? Cu ajutorul ei intenționez să demonstrez încă o dată elevilor superioritatea modului de rezolvare algebric - prin punerea în ecuație - față de cel aritmetic.

- Ai făcut o alegere greşită. Oricine va înțelege sensul problemei tale, o va rezolva mental, aproape fără nici un fel de calcul.

Cum a rezolvat problema bătrânul mecanic - tatăl Olgăi?

O întrebare suplimentară pentru cei care ştiu să scrie şi să rezolve ecuații de gradul doi: cum intenționa Olga să rezolve această problemă algebric şi aritmetic?

263. Da sau nu?

Închipuiți-vă că prietenul vostru s-a gândit la un număr întreg între 1 şi 1.000. Pentru a ghici numărul ales, îi veți pune o serie de întrebări, cerându-i să răspundă dacă numărul ales de el este mai mare (sau mai mic) decât un număr pe care i-l indicați voi. Prietenul va răspunde numai prin *da* sau *nu.* S-ar putea să vă pară neverosimil că sunt suficiente numai zece întrebări ca să ghiciți *la sigur* orice număr întreg între 1 şi 1.000. Totuşi aşa este. Gândiți-vă bine ce numere trebuie să alegeți pentru a le indica prietenului vostru!

Capitolul 8 Jocuri şi trucuri matematice

A. JOCURILE

Există jocuri al căror succes nu depinde de un concurs de împrejurări favorabile, ci de propria ingeniozitate şi de calcule prealabile. Cine ştie să facă calculul care stă la baza jocului devine deținătorul secretului lui, ceea ce îi asigură victoria asupra celorlalți participanți care încă nu şi-au însuşit baza matematică a jocurilor. Jocurile de acest fel capătă semnificația unor probleme. Pe de altă parte, aproape oricare problemă de tipul *distracțiilor matematice* se remarcă prin prezența elementelor specifice jocurilor propriu-zise.

264. 11 obiecte

Pe masă se află unsprezece obiecte de acelaşi fel, de exemplu chibrituri. Primul participant la joc ia după placul său 1, 2 sau 3 obiecte din grămadă. Al doilea participant ia şi el 1,2 sau 3 obiecte din cele rămase. Apoi ia din nou primul ş.a.m.d. Aşadar ambii participanți au dreptul să ia alternativ cel mult trei obiecte. *Pierde* cel care este nevoit să ia *ultimul* obiect. Se întreabă dacă cel care începe jocul poate să conducă jocul în aşa fel, încât partenerul să fie obligat să ia ultimul obiect? Cum trebuie condus jocul ca să câştigăm, dacă vom majora numărul inițial al obiectelor la 30?

Generalizarea jocului. Doi copii iau alternativ un număr de obiecte de pe masă. Cum trebuie condus jocul, pentru ca partenerul să fie obligat să ia ultimul obiect, dacă pe masă se află inițial *n* obiecte şi se admite să se ia la o mişcare 1 până la *p* obiecte *(p* fiind mult mai mic decât *n*)?

265. Cine va lua ultimul chibrit?

Să modificăm condiția principală a jocului precedent. Acum jucătorul care va lua *ultimul* chibriturile de pe masă va *câştiga* jocul. Joacă doi jucători şi fiecare ia alternativ un număr de 1 până la 6 chibrituri.

Cum trebuie condus jocul pentru a lua ultimul chibriturile de pe masă, ştiind că la început erau 30 de chibrituri?

266. Cu soț câştigă

Doi jucători iau alternativ 1 - 4 chibrituri din cele 27 aflate pe masă. Câştigă cel care la sfârşitul jocului va avea un număr par de chibrituri.

Cum trebuie jucat pentru a câştiga?

267. Tzianşitzi

Tzianşitzi este un joc național chinezesc. Traducerea exactă a cuvântului este alegerea pietrelor. Se joacă în doi, în felul următor: din două grămăjoare de pietricele, jucătorii iau pe rând un număr oarecare de pietricele, respectând următoarele reguli:

a) dintr-o grămăjoară se poate lua orice număr de pietricele (chiar toate deodată);

b) se pot lua pietricele concomitent din ambele grămăjoare, dar obligatoriu un număr egal din fiecare.

Câştigă cel care, respectând aceste reguli, va lua ultima pietricică. Fireşte că pietricelele pot fi înlocuite cu orice alte obiecte. Jocul ***Tzianşitzi*** reprezintă o dezvoltare şi o extindere a jocurilor cu chibrituri descrise anterior, cu deosebirea că, în cazul de față, obiectele sunt adunate în două grămăjoare, numărul lor nu este limitat şi în cadrul unei mişcări pot fi luate oricâte obiecte, bineînțeles respectând regulile jocului.

Interesul matematic al acestui joc rezidă în aflarea teoriei lui, adică în căutarea şi fundamentarea unei metode de joc care să-i asigure unui jucător câştigarea partidei. Este clar, de exemplu, că în situațiile (1, 0) - ceea ce înseamnă că într-o grămăjoară se află o pietricică, iar în cealaltă 0 pietricele - ca şi în situația *(n,n)* - care înseamnă că ambele grămăjoare au acelaşi număr de pietricele - va câştiga cel care joacă primul. El va lua dintr-o dată toate pietricelele (în primul caz pe baza regulii *a),* în al doilea caz pe baza regulii *b).* în situația (1, 2) cel care joacă primul va pierde. E foarte uşor să ne convingem de aceasta, întocmind tabelul tuturor posibilităților de joc din poziția (1,2):

Numărul	Joacă		Numărul	Joacă		Numărul	Joacă		Numărul	Joacă	
pietrelor	***A***	B	pietrelor	***A***	B	pietrelor	***A***	B	pietrelor	***A***	B
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
2	2	0	2	0	0	2	1	0	2	1	0

În prima rubrică a tabelului se indică numărul pietricelelor din fiecare grămăjoară. Cifrele sub *A* şi B indică numărul pietricelelor rămase în grămăjoare după prima mişcare (jucătorul *A* începe primul). Deci, în poziția (1,2) jucătorul care face prima mişcare pierde inevitabil. Să notăm această poziție cu, literele PP (primul pierde) şi să continuăm analiza.

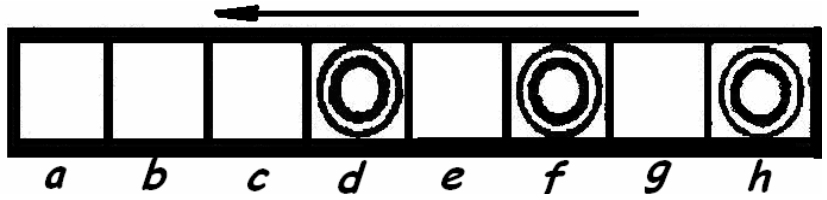
Dacă în prima grămăjoară există 1 pietricică, iar în a doua cel puțin 3 pietricele, jucătorul *A* care începe va câştiga: el va lua din a două grămăjoară atâtea pietricele încât să rămână numai 2, ceea ce va duce la poziția (1,2), adică la un raport de pietricele care face ca jucătorul B, care urmează să joace, să piardă. De aici rezultă că poziția (1,n) este de tipul PP numai pentru $n = 2$; în toate celelalte cazuri ea este de tipul PC - primul câştigă. Jucătorul care vrea să câştige trebuie să se conducă după următorul principiu: prin jocul său el trebuie să reducă raportul pietricelelor din grămăjoare la poziția PP.

Care raporturi dintre pietricele, în afară de (1,2), vor fi de tipul PP? Analizați cu atenție toate posibilitățile de joc în poziția (2,n) pentru $n > 1$, apoi în poziția (3,n) etc. şi veți găsi fără îndoială încă o serie de raporturi de tipul PP, a căror cunoaştere este obligatorie pentru a câştiga la jocul ***Tzianşitzi.*** Apoi puteți încerca să găsiți legea succesiunii pozițiilor de tipul PP şi în general să stabiliți teoria matematică a

jocului *Tzianşitzi.* Desigur, acesta nu este un lucru uşor. Ea a fost pentru prima oară soluționată abia în 1930, de profesorul Igor Vladimirovici Arnold din Moscova.

268. Cum să câştigăm?

Se joacă în doi. Terenul de joc îl constituie o fâşie de hârtie împărțită în 8 pătrățele. În pătrățelele d, f şi h se aşează piese de table.

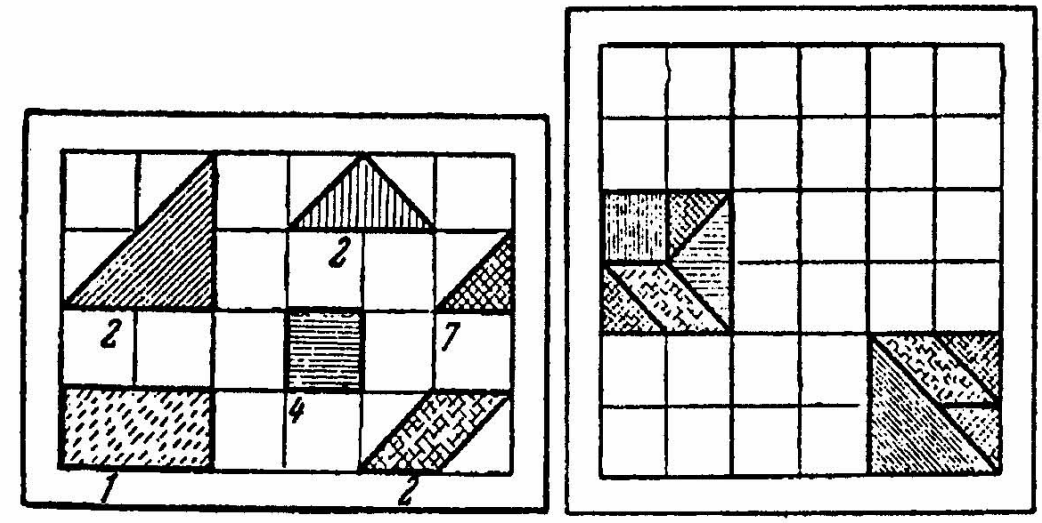


Participanții mută pe rând oricare din cele 3 piese în direcția arătată de săgeată şi o aşează în unul din celelalte pătrățele. Piesa mutată poate să sară peste alta, după cum poate fi pusă şi în pătrățelul ocupat de altă piesă.

Câştigă cel care va pune ultima piesă în pătrățelul a. Jucătorul care începe va câştiga întodeauna, dacă va elabora în prealabil un sistem corect de mutări.

269. Să se construiască un pătrat

Se joacă în doi. Fiecare jucător trebuie să aibă 18 figuri de carton. Culoarea figurilor de care se foloseşte unul din participanți trebuie să difere de culoarea figurilor celuilalt participant. Tabla de joc este un pătrat cu 36 pătrățele, grupate în 9 sectoare a câte 4 pătrățele. Dimensiunile figurilor sunt în funcție de dimensiunile pătrățelelor. Combinând figurile date, se pot construi mai multe pătrate de aceeaşi mărime ca şi sectoarele tablei (adică de 4 pătrățele).



Desigur că fiecare jucător nu poate construi mai mult de 4 pătrate, căci nu dispune decât de 18 figuri, cu o suprafață totală de 17,5 pătrățele. Pătrățelele se construiesc pe tablă în mod succesiv. Fiecare jucător pune o figură pe oricare pătrățel liber al oricărui sector care n-a fost încă ocupat de partener, dar nu are voie să ocupe cu figurile sale mai mult de 4 sectoare.

Este interzis să se mute o figură dintr-un pătrățel într-altul, să se schimbe poziția sau să se deplaseze figurile dintr-un sector în altul. Rostul jocului este de a folosi cu iscusință figurile, pentru a forma un număr cât mai mare de pătrate.

Jocul se termină atunci când niciunul din parteneri nu poate construi un pătrat din figurile rămase. Câştigă cel care construieşte mai multe pătrate.

270. Cine va spune primul „o sută"?

Se joacă în doi. Primul jucător spune un număr întreg care să nu depăşească 10, adică poate spune 10 şi orice număr mai mic decât el. La acest număr, al doilea jucător adună un număr ales de el - care de asemenea nu poate fi mai mare de 10 - şi indică suma. La această sumă primul jucător adună un alt număr întreg, mai mic de 10 şi anunță suma rezultată. Celălalt jucător adună la noua sumă un alt număr mai mic de 10 ş.a.m.d., până când ultima sumă va fi o sută. Primul poate să spună, de exemplu, 7, al doilea 12, primul 22 etc.

Câştigă cel care spune o sută. Cum se poate câştiga jocul? După ce veți găsi cheia victoriei, gândiți-vă cum poate fi condus jocul în condiții schimbate; de exemplu, dacă numerele limite sunt altele decât 10, iar suma maximă este şi ea alta decât 100.

271. Jocul de-a pătrățelele

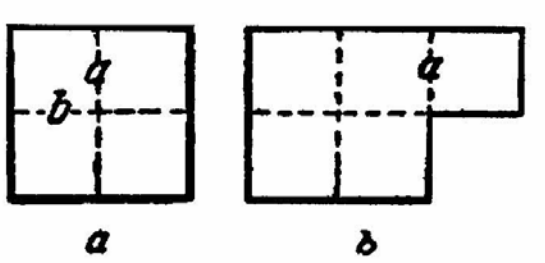
Pentru joc se foloseşte o figură dreptunghiulară, desenată pe o hârtie în pătrățele. Figura dreptunghiulară va fi alcătuită din câteva pătrățele (e preferabil ca numărul lor să fie fără soț). Dimensiunile şi conturul figurii nu au importanță. Cei doi jucători îngroaşă, pe rând, cu creionul sau cu cerneală, laturile pătrățelelor interioare (de fiecare dată se va îngroşa câte o latură). Laturile pătrățelelor interioare care se confundă cu marginea figurii nu trebuie îngroşate, ele socotindu-se construite.

Jucătorul care va îngroşa ultima latură a unui pătrățel îl de verificare şi apreciere câştiga. Pătrățelul câştigat este notat cu un semn distinctiv, iar câştigătorul dobândeşte dreptul de a mai face o mişcare, adică de a îngroşa încă o latură. Nu se admite renunțarea la acest drept. în felul acesta el poate câştiga la rând câteva pătrățele.

Jocul de verificare şi apreciere fi câştigat de cel care a fost ocupat mai multe pătrățele. Proporțiile victoriei sunt determinate de diferența dintre numărul pătrățelelor ocupate de fiecare jucător.

Teoria matematică a acestui joc este mult mai complicată decăt pare la prima vedere. Atunci când figura cuprinde un număr mare de pătrățele, se pot face atât de multe combinații, încât stabilirea şi memorarea lor este aproape imposibilă.

Să ne limităm la analiza mai multor cazuri simple, în care rezultatul jocului poate fi prevăzut. Cunoaşterea acestor elemente de teorie vă oferă superioritatea asupra adversarului.

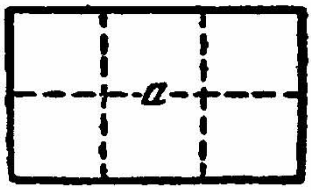


1) Orice pătrat compus din 4 pătrățele (a) va fi pierdut în întregime de cel care începe jocul. Astfel, dacă jucătorul care a început va îngroşa oricare latură a unui pătrățel interior, de exemplu latura *a,* adversarul lui, îngroşând latura *b,* va ocupa 1 pătrățel şi, având dreptul să joace în continuare, ocupă pe rând şi celelalte 3 pătrățele.

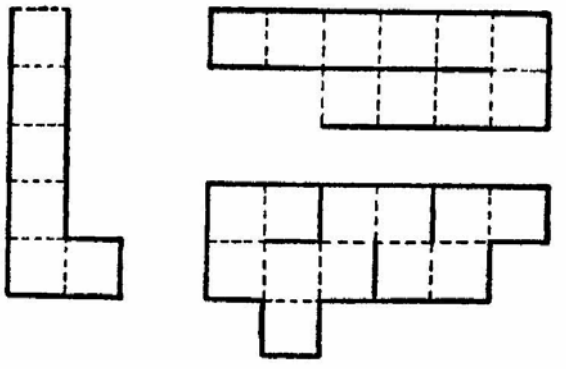
2) Dacă figura cuprinde 5 pătrățele (b) şi facem prima mişcare bună, vom pierde numai 3 pătrățele (unul îl vom câştiga şi 4 le vom pierde); în cazul unei mişcări greşite vom pierde toate cele 5 pătrățele. Pentru a ocupa un pătrățel şi a lăsa adversarului celelalte patru, prima mişcare trebuie să fie îngroşarea laturii *a.*

În cazul în care vom începe cu orice altă mişcare, adversarul va ocupa pe rând toate cele 5 pătrățele.

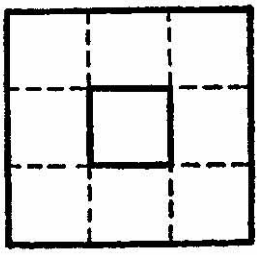
3) Un dreptunghi format din 6 pătrățele va fi câştigat în întregime de cel care jucând primul va îngroşa latura *a.*



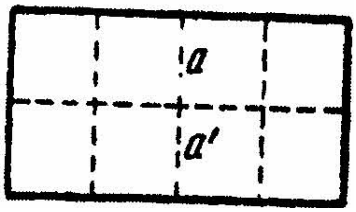
4) Un canal lat de un pătrățel - fie dreptunghiular, fie frânt, cu un singur rând sau cu mai multe rânduri de pătrățele, dar fără goluri interioare va fi câştigat în întregime de cel care începe jocul.



Când capetele canalului sunt unite, formând, un gol interior (de exemplu, un pătrățel ocupat), nu trebuie să începeți jocul, căci veți pierde toate pătrățelele.

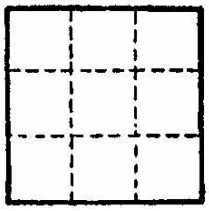


5) Dacă figura este un dreptunghi cu 8 pătrățele (figura de mai jos), putem obține remiză îngroşând la prima mişcare latura *a* sau *a'*. Orice altă mişcare duce la pierderea jocului.

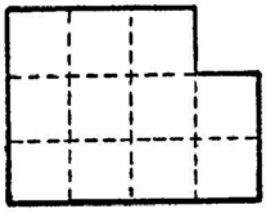


Din exemplele de mai sus se poate vedea că tehnica jocului constă în a împărți, prin mişcări chibzuite, figura inițială în figuri simple de tipul descris şi de a determina adversarul să îngroaşe linii care duc la pierdere, în timp ce noi vom face mişcări care ne asigură câştigul. Totodată trebuie să fim atenți şi la numărul pătrățelelor câştigate.

Problemă. Jucând pe un pătrat compus din 9 pătrățele, putem câştiga cel puțin 7 pătrățele ocupând 8 pătrățele şi pierzând unul).



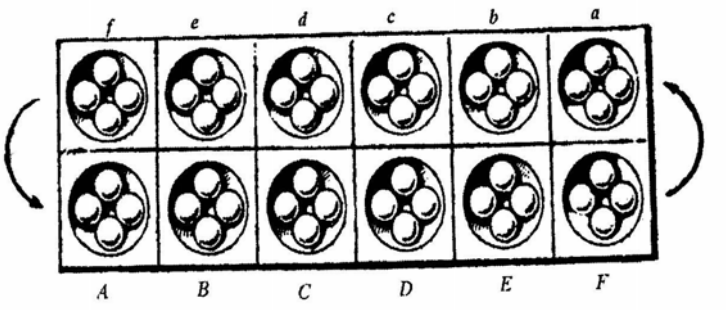
Aflați cum trebuie început jocul şi analizați diferitele variante de continuare. întocmiți singuri schema jocului cu o figură în formă de poligon compus din 11 pătrățele.



Răspundeți dacă cel care începe jocul trebuie inevitabil să câştige sau să piardă şi minimum câte pătrățele.

272. OWA

Owa se joacă de locuitorii Africii de Vest. Pentru acest joc se foloseşte o scândură împărțită în 12 compartimente. În fiecare compartiment este scobită o cavitate, iar în fiecare cavitate se introduc la începutul jocului 4 bile identice. Copiii din Africa se mulțumesc adesea să sape 12 gropi in pământ şi joacă cu 48 de pietricele.



Se joacă in doi. Un jucător (să-l numim P) alege latura *AF,* iar celălalt (să-l numim p) începe scoțând toate bilele aflate în una din cavitățile de pe latura sa *(a f)* şi le distribuie, câte una, în cavitățile următoare. Ordinea succesiunii cavităților este inversă mişcării acelor ceasornicului *(ABCDEFabcdef).* De exemplu, dacă jucătorul P va începe jocul, scoțând bilele din cavitatea *D* el trebuie să le distribuie câte una, în cavitatea *E,F,a,b.* Jucătorul p va putea să răspundă, de exemplu prin golirea cavității *a* (care după mutarea lui P are 5 bile), distribuind bilele în cavitățile *bcdef.*

După aceste două mutări va rezulta următoarea poziție:

f e d c b a

5 5 5 5 6 0

4 4 4 0 5 5

A B C D E F

Dacă unul din jucători goleşte o cavitate care are 12 sau mai multe bile, atunci cu prilejul distribuirii lor în celelalte cavități el va sări cavitatea respectivă, adică o va lăsa goală. În fine, dacă distribuind bilele în cavități ultima bilă a fost pusă în ultima cavitate a laturii (*f* sau *F) a* adversarului, după care în această ultimă cavitate se vor găsi 2 sau 3 bile, jucătorul care a făcut mutarea va lua bilele respective, considerându-le câştigate. Dacă şi în cavitățile precedente de pe latura adversarului se vor găsi cu această ocazie tot 2 sau 3 bile, el le va lua şi pe acestea, dar numai până la cavitatea în care numărul bilelor este altul decât 2 sau 3. Vom explica aceste reguli prin exemple:

Exemplul 1. În poziția:

f e d c b a

2 1 2 3 1 2

0 0 0 0 0 6

A B C D E F

Jucătorul P mută şi goleşte cavitatea *F* (altă mutare nu are). Poziția devine:

f e d c b a

3 2 3 4 2 3

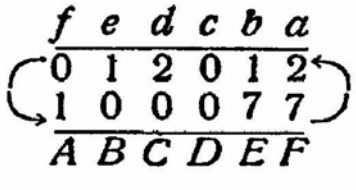
0 0 0 0 0 0

A B C D E F

Ultima bilă a jucătorului P a fost depusă în cavitatea *f.* În cavitatea *f* situată pe latura adversarului sunt acum 3 bile. Jucătorul P are deci dreptul la pradă. El ia cele 3 bile aflate în cavitatea *f,* cele două bile din cavitatea *e,* şi cele 3 bile din cavitatea *d.* În cavitatea *b* şi *a* se găsesc de asemenea 2 şi 3 bile, dar jucătorul P nu poate să le ia, căci a intervenit gropița *c,* în care se află 4 bile (alt număr decât 2 sau 3). Această mutare i-a adus lui P un câştig de 8 bile.

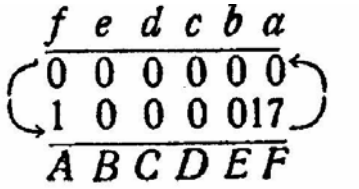
Trebuie să spunem că în poziția (2) jucătorul p, dacă vrea să continue jocul, nu are voie să înceapă cu cavitatea *a* sau *b,* căci atunci jucătorul P nu va mai avea bile pe latura sa şi jocul va înceta.

Exemplul 2. În poziția:

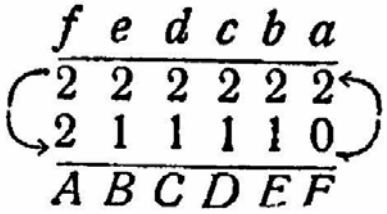


Jucătorul P, dacă va începe cu cavitatea *F,* nu va câştiga nimic, căci ultima bilă va fi depusă pe latura sa. Nici dacă va începe jocul cu *E* nu va câştiga nimic, deoarece, deşi ultima bilă va fi depusă în cavitatea *f*, totuşi acolo după această mutare nu se vor găsi 2 sau 3 bile.

Exemplul 3. O cavitate goală nu oferă întotdeauna o poziție sigură. În poziția:



toate cavitățile aflate pe latura jucătorului p sunt goale şi totuşi jucătorul P câştigă 12 bile. El începe cu cavitatea *F,* ceea ce face să se ajungă la poziția:



ultima bilă fiind depusă în cavitatea *f*, jucătorul P câştigă toate cele 12 bile aflate în cavitățile de pe latura jucătorului p. Jocul încetează numai în 2 cazuri:

1. Dacă jucătorii au căzut de acord că bilele rămase pe tablă nu sunt suficiente pentru formarea unei poziții care să ofere prada.

2. Dacă unul din jucători nu are bile pe latura sa şi nu poate face nici o mutare.

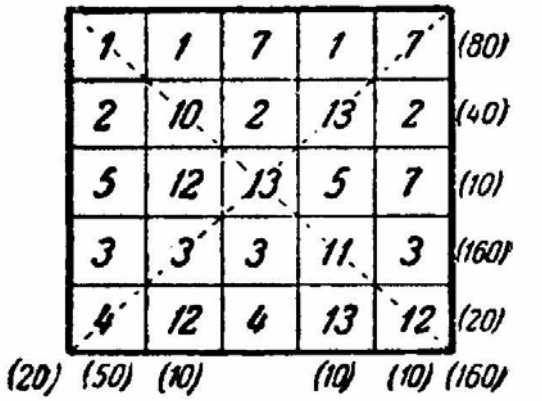
Învingător este jucătorul care la sfârşitul partidei a câştigat mai multe bile. Dacă jocul a încetat din primul motiv, bilele rămase pe tablă nu se vor socoti la numărarea definitivă a punctelor. Dacă a încetat pentru al doilea motiv, atunci, pe baza convenției prealabile, bilele rămase pe tablă, fie că nu vor fi socotite, fie că vor fi date jucătorului care şi-a lăsat adversarul fără bile, fie dimpotrivă, vor fi acordate drept compensare jucătorului rămas în imposibilitatea de a muta, din lipsă de bile.

Owa, ca şi şahul, implică un plan de joc, adică anticiparea câtorva mutări, ținând seama de riposta posibilă a adversarului. Până în prezent teoria jocului Owa nu a fost încă studiată.

273. „Matematico" (joc italian)

Pentru acest joc se pregătesc 52 cartonaşe mici, numerotate: primele 4 cu 1, următoarele 4 cu 2, apoi 3 ş.a.m.d. până la 13. Numărul participanților la joc nu este limitat. Fiecare jucător îşi desenează pe o coală de hârtie un pătrat cu 25 de pătrățele. Unul dintre jucători (cel care începe) strânge toate cartonaşele, le

amestecă aşa cum se procedează cu cărţile de joc, apoi întoarce pe faţă primul cartonaş şi anunţă numărul scris pe el. Toţi participanţii scriu acest număr în unul din pătrăţelele de pe coala lor de hârtie.



După ce numărul a fost trecut într-un pătrăţel, el nu mai poate fi mutat într-alt pătrăţel. Apoi se anunţă numărul înscris pe cartonaşul următor, iar jucătorii îl scriu în oricare din pătrăţelele libere de pe coala lor de hârtie ş.a.m.d. Jocul se termină o dată cu completarea tuturor celor 25 de pătrăţele. După aceasta urmează evaluarea *producţiei* participanţilor. Evaluarea se face prin acordarea unui număr de puncte, în funcţie de modul cum au fost plasate cifrele în pătrăţele. învingător este declarat jucătorul care a totalizat cele mai multe puncte. Calcularea punctelor se face după tabelul următor:

Combinarea numerelor	*Pe orizontală sau verticală*	*Pe diagonală*
Pentru 2 numere identice.....	10 p.....	20 p.
Pentru 2 perechi de numere.....	20 p.....	30 p.
Pentru 3 numere identice.....	40p.....	50 p.
Pentru 3 numere identice şi alte 2 numere identice.....	80 p.....	90 p.
Pentru 4 numere identice.....	160 p.....	170 p.
Pentru 5 numere succesive, dar care nu trebuie să fie aşezate în ordine	50 p.....	60 p.
Pentru 3 de 1 şi 2 de 13.....	100 p.....	110 p.
Pentru numerele 1, 13, 12, 11 şi 10, dar care nu trebuie să fie dispuse în ordine crescătoare sau descrescătoare.....	150 p.....	160 p.
Pentru 4 de 1.....	200 p.....	210 p.

274. Jocul cu pătrate magice

Acest joc poate constitui un amuzament pentru un singur om, după cum la el pot să participe oricât de mulţi jucători. Fiecare participant desenează pe o coală de hârtie un pătrat împărţit în 16, 25, 36 etc. pătrăţele egale (numărul lor va fi hotărât la începutul jocului). Pentru fiecare tur al jocului se va stabili în prealabil o serie de numere întregi, fiecare dintre ele trebuind să fie folosit măcar o singură dată;

numerele vor fi trecute în pătrățelele pătratului, în aşa fel ca sumele lor din fiecare rând orizonatal şi vertical al pătratului să fie identice, adică să se alcătuiască un pătrat magic. Strict vorbind, acest pătrat nu va fi propriu-zis magic, căci adevăratul pătrat magic trebuie să aibă sume identice nu numai pe orizontală şi verticală, ci şi pe diagonală.

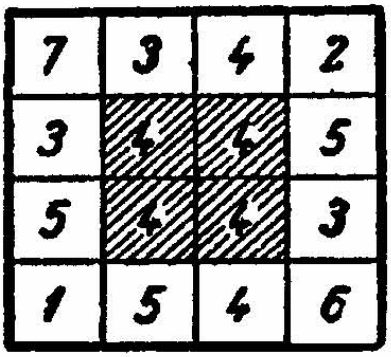
După cum vedeți, în acest joc exigențele sunt întrucâtva micşorate şi, prezentat în această formă, la el poate participa oricine ştie să adune şi să scadă. În cursul rezolvării, numerele pot fi mutate dintr-un pătrățel în altul şi înlocuite cu altele din aceeaşi serie. Pentru a înlesni mutarea dintr-un pătrățel în altul, e bine să se pregătească o cantitate mai mare de seturi de cartonaşe numerotate, de mărimea unui pătrățel. Seria numerelor din care urmează să fie ales pătratul magic nu trebuie să fie prea mare; se pot alege, de exemplu, toate numerele cu o singură cifră, sau numai o parte din ele. Atunci când participă mai mulți jucători, se poate conveni ca să existe 2 învingători: cel care termină primul şi cel care din numerele date a reuşit să alcătuiască pătratul cu cea mai mare sumă.

6	8	7	0	9
6	5	8	9	2
9	2	7	9	3
5	7	7	4	7
4	8	1	8	9

Exemplul 1. Fie un pătrat cu 25 de pătrățele. Numerele date sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9. Folosind cel puțin o dată toate aceste numere, trebuie să se completeze toate pătrățelele, potrivit cu condițiile jocului. Una din soluțiile posibile o puteți vedea în figura de mai sus. Sumele numerelor din coloane şi rânduri sunt identice.

Exemplul 2. Fie un pătrat cu 16 pătrățele. Numerele alese sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6 şi 7. Aranjați-le în aşa fel, încât să obțineți un pătrat magic. O condiție suplimentară: în cele 4 pătrățele centrale suma numerelor trebuie să fie identică cu cea a coloanelor şi rândurilor.

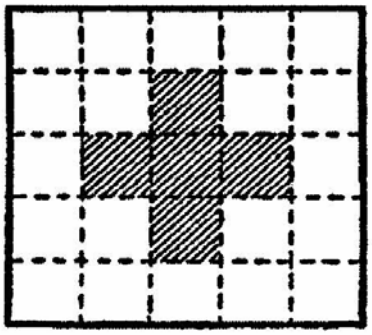
Una din soluțiile posibile este indicată mai jos:



Temă pentru joc. Fie un pătrat cu 25 de pătrățele. Numerele date sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 şi 8. Să se completeze pătrățelele cu aceste numere potrivit cu condițiile jocului. Condiții suplimentare:

a) În pătrățelele haşurate, suma numerelor trebuie să fie identică cu cea a coloanelor şi rândurilor.

b) Numerele 0 şi 6 vor fi folosite o singură dată.



275. Numere încrucişate

În loc să încrucişăm cuvinte, putem completa pătrăţelele unei figuri cu numere care să satisfacă definiţiile date. Prima cifră a numărului căutat trebuie să fie scrisă în pătrăţelul care are acelaşi număr cu definiţia, iar ultima cifră în ultimul pătrăţel al coloanei sau rândului, sau în pătrăţelul după care urmează un obstcol indicat printr-o linie îngroşată ori printr-un pătrăţel haşurat. Ca şi la jocul de cuvinte încrucişate, numerele se citesc de la stânga la dreapta (pe orizontală) şi de sus în jos (pe verticală). Într-un pătrăţel se scrie o singură cifră. Iată câteva exemple de numere încrucişate:

Problema 1. Să se completeze toate pătrăţelele careului cu numere care îndeplinesc următoarele condiţii:

Orizontal: 1) Diferenţa dintre un număr compus din 4 cifre consecutive şi un număr compus din aceleaşi cifre, dar scrise în ordine inversă (număr invers). 4) Număr compus din cifre consecutive crescânde. 6) Produsul numerelor de la 3 vertical şi 8 orizontal. 8) Număr prim, adică număr care nu se împarte decât cu 1 şi cu el însuşi. 9) Multiplu al lui 13.

Vertical: 1) Cubul uneia din cifrele numărului de la 1 orizontal. 2) Ultimele 3 cifre coincid cu ultimele cifre ale produsului numerelor de la 1 orizontal şi 7 vertical. 3) Câtul rezultat din împărţirea numărului de la 6 orizontal cu cel de la 8 orizontal. 5) E compus din 3 cifre consecutive. 7) Produsul unui divizor al numărului de la 3 vertical cu unul din divizorii numărului de la 1 orizontal.

1		2	3
4	5		
6			7
8		9	

Ca şi la cuvinte încrucişate, soluţia trebuie căutată începând cu enunţul mai uşor. Astfel, un mic calcul ne va permite să găsim uşor numărul de la nr.1 orizontal. Deoarece, potrivit definiţiei, numărul invers este mai mic decât numărul iniţial, este evident că cifrele primului număr constituie o succesiune descrescândă: a, a - 1,a - 2, a - 3.

Considerând aceste litere drept cifre, vom scrie prin metoda aritmetică un număr cu 4 cifre: [a] [a-1] [a-2] [a-3].

Să găsim diferența dintre acest număr şi inversul lui: [a] [a-1] [a-2] [a-3] - [a-3] [a-2] [a-1] [a]. [a-3] unități este mai mic decât [a] unități; împrumutăm 10, împărțim în unități; în acest caz (10 + a - 3) - a = 7. La ordinul zecilor am avut a - 2, am împrumutat 10, deci au rămas [a-3] zeci, adică mai puține decât (a - 1). împrumutăm 100, o împărțim în zeci; atunci (10 + a - 3) - (a - 1) = 8. Au rămas exact atâtea sute câte trebuie scăzute; deci în locul sutelor va scrie zero, iar în locul miilor a - (a - 3) = 3. Aşadar:

$$\begin{array}{r} [a][a-1][a-2][a-3] - \\ \underline{[a-3][a-2][a-1][a]} \\ 3\quad 0\quad 8\quad 7 \end{array}$$

Trecem acest număr în primul rând al pătratului nostru:

1 3	0	2 8	3 7
4 4	5 5	6	7
6 3			7
8		9	

Acum nu va fi greu să-l aflăm pe nr.1 vertical. Potrivit condiției, pe această verticală trebuie să figureze cubul unuia din numerele 3, 7 sau 8. În cazul nostru se potriveşte 343 (7^3). Potrivit definiției, la 4 orizontal nu poate fi decât numărul 4567. Cu această ocazie a rezultat şi numărul de la 3 vertical. Restul numerelor aflați-le singuri.

Problema 2. Să se completeze pătrățelele careului de mai jos cu numerele care îndeplinesc următoarele condiții:

1		2	3	4
5	6	7		
8				
9			10	11
12				

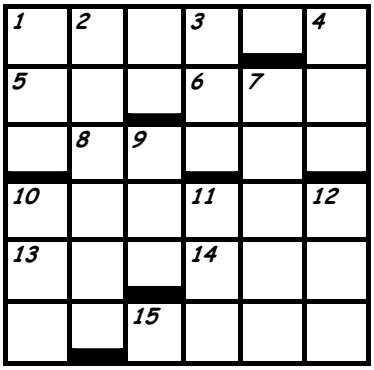
Orizontal: 1) Număr compus din cifre diferite, printre care nu se găseşte niciuna comună numărului de la 8 orizontal, care este şi el alcătuit numai din cifre diferite. 5) Cel mai mare divizor al numărului de la 3 vertical. 7) Numărul invers de la 3 vertical. 8) Vezi 1 orizontal. 9) O noime din suma numerelor de la 1 şi 8 orizontal. 12) Produsul a trei numere prime cu 2 cifre, din care două sunt divizorii numărului invers de la 6 vertical.

Vertical: 1) Prima cifră este egală cu suma celorlalte două. 2) An din a doua jumătate a sec. XVIII. 3) Diferența dintre numerele de la 1 şi 8 orizontal. 4) Ultima cifră a acestui număr este produsul primelor sale două cifre. 6) Inversul acestui număr este multiplul numărului de la 3 vertical şi este compus din trei factori primi cu 2 cifre. 9) Unul din divizorii numărului invers de la 6 vertical. 10) Ca la 5 orizontal. 11) Cel mai mic divizor al numărului de la 3 vertical.

Problema 3. Să se completeze pătrățelele careului următor cu numere care îndeplinesc următoarele condiții:

Orizontal: 1) Pătratul unui număr prim. 5) Jumătatea numărului care este cel mai mare divizor comun al numerelor de la 10 şi 11 vertical. 6) Cubul unui pătrat perfect $(x^2)^3$. 8) Rădăcina pătrată a numărului de la 1 orizontal. 10) Pătratul unui număr. Este un număr simetric, adică un număr care se citeşte la fel de la stânga la dreapta, ca şi de la dreapta la stânga. 13) Mai mare cu o unitate decât numărul de la 9 vertical. 14) De 5 ori mai mare decât numărul de la 8 orizontal. 15) Pătratul numărului mai mare cu o unitate decât numărul de la 13 orizontal.

Vertical: 1) Cu 8 unități mai mic decât cel mai mic număr întreg care împărțit cu 2, 3, 4, 5 şi 6 dă un rest de respectiv 1, 2, 3, 4 şi 5. 2) Suma cifrelor sale este 29. 3) Număr prim. 4) Număr prim, divizor al numărului de la 11 vertical. 7) Produsul împătrit al unei zecimi din numărul de la 15 orizontal cu numărul de la 13 orizontal. 9) Dublul numărului de la 4 vertical. 10) Inversul numărului de la 11 vertical. 11) Rădăcina pătrată a numărului de la 10 orizontal. 12) Un multiplu al celui mai mare divizor al numărului de la 13 orizontal.



B. TRUCURI

Principalul obiect al trucurilor aritmetice este ghicirea numerelor alese în minte sau a rezultatelor operațiilor cu aceste numere. Secretul acestor trucuri constă în faptul că ghicitorul cunoaşte şi ştie să folosească unele proprietăți ale numerelor, pe care cel care „alege în minte" nu le cunoaşte.

Interesul matematic al oricărui truc constă în demascarea bazelor lui teoretice, care în majoritatea cazurilor sunt cât se poate de simple, dar ascunse în mod ingenios. Pentru verificarea eficienței trucurilor putem folosi orice exemple, dar pentru fundamentarea majorității lor este mai bine să apelăm la algebră. La început veți putea omite demonstrarea trucurilor, limitându-vă la cunoaşterea regulilor lor, pentru a vă uimi prietenii.

Dar nici demonstrațiile nu sunt lipsite de interes pentru cei cărora le place să gândească şi cunosc principiile elementare ale algebrei. Nu dăm aici decât schema trucurilor, căci executarea lor în practică diferă în funcție de condițiile existente şi de loc, precum şi de gustul, ingeniozitatea şi fantezia voastră.

276. Ghicirea unui număr *(7 trucuri)*

Trucul 1. Gândiți-vă la un număr. Scădeți 1. Dublați restul şi adunați-l cu numărul la care v-ați gândit. Gata! Spuneți-mi rezultatul final şi am să ghicesc numărul la care v-ați gândit.

Procedeul ghicirii: adunați la numărul comunicat 2 şi suma rezultată o împărțiți la 3. Câtul este numărul la care s-a gândit prietenul.

Exemplu: numărul ales a fost -18; 54:3 = 18.

Demonstrația: notăm cu x numărul ales, să efectuăm operațiile cerute: $x - 1$, $2(x - 1)$, $2(x - 1) + x$; rezultatul comunicat este: $2x - 2 + x = 3x - 2$; adunând 2 rămâne $3x$; împărțind cu 3 obținem numărul ales x.

Trucul 2. Propuneți unui prieten să aleagă în minte un număr. Apoi, puneți-l să înmulțească şi să împartă de mai multe ori numărul ales - fără să vă comunice rezultatele - cu diferite numere pe care i le veți indica la întâmplare. După câteva înmulțiri şi împărțiri, vă opriți şi îi cereți să împartă rezultatul final cu numărul inițial ales, apoi să adune la catul obținut numărul ales şi să spună rezultatul. Pe baza acestuia veți ghici imediat numărul la care s-a gândit prietenul vostru.

Metoda ghicirii este simplă. Concomitent cu prietenul trebuie să alegeți şi voi în minte un număr (de exemplu 1) şi să efectuați cu el toate înmulțirile şi împărțirile cerute, inclusiv împărțirea cu numărul inițial, dar fără să-l mai adunați pe acesta la cât. Atunci catul va fi identic cu cel la care a ajuns prietenul vostru, deşi numerele asupra cărora s-au efectuat operațiile au fost diferite. După aceasta, nu va mai rămâne decât să scădeți din rezultatul ce vi s-a comunicat, rezultatul vostru. Diferența va fi numărul căutat.

Exemplu. Prietenul a ales numărul 7. L-a înmulțit cu 12. Produsul 84 a fost împărțit la 2. Numărul obținut 42 l-a înmulțit cu 5. Produsul 210 l-a împărțit la 3. A rezultat 70, iar după împărțirea cu numărul inițial ales 7 a obținut catul 10. Adunând la acesta numărul inițial ales, v-a comunicat rezultatul: 17. Totodată voi ați ales numărul 1. L-ați înmulțit cu 12, şi ați obținut 12. împărțindu-l cu 2, obțineți 6, înmulțindu-l pe acesta cu 5 rezultă 30. Împărțind produsul cu 3 obțineți 10 - la fel ca şi prietenul d-voastră. Nu mai împărțiți la numărul inițial ales, acesta fiind 1. Acum scădeți 10 din 17 şi diferența rezultată - 7 - este numărul căutat.

Nota 1. Pentru ca trucul să producă un efect şi mai mare, puteți să-i propuneți prietenului să-şi aleagă singur numerele cu care ar dori să înmulțească şi să împartă rezultatele obținute, cu condiția să vi le comunice de fiecare dată.

Nota 2. Înmulțirile şi împărțirile nu trebuie să alterneze în mod obligatoriu. Putem face mai întâi câteva înmulțiri, iar apoi câteva împărțiri sau invers. Ultimele două operații trebuie să fie însă cele arătate mai sus. Demonstrați acest truc, adică arătați prin litere că este valabil pentru oricare număr ales.

Trucul 3. În prealabil convenim ca prin partea mare a unui număr fără soț înțelegem numărul întreg imediat mai mare decât jumătatea numărului fără soț considerat. De exemplu, să luăm numărul 13: jumătatea lui este 6,50, iar partea mare este 7; pentru numărul 21 partea mare este 11 etc.

Alegeți în minte un număr. Adunați-l cu jumătatea lui sau - dacă este număr impar - cu partea mare. La suma obținută adunați jumătatea ei sau - dacă este un

număr impar - partea mare. Împărțiți cu 9 numărul obținut, spuneți-mi câtul, iar dacă a rămas rest spuneți-mi dacă acesta este mai mare, egal sau mai mic decât 5. În funcție de răspunsul la această întrebare, numărul ales este egal cu:

Câtul x 4 + 0, dacă s-a împărțit exact;

Câtul x 4 + 1, dacă restul este mai mic ca 5;

Câtul x 4 + 2, dacă restul este egal cu 5;

Câtul x 4 + 3, dacă restul este mai mare ca 5.

Exemplu. S-a ales 15. Îndeplinind operațiile cerute rezultă: 15 + 8 = 23; 23 + 12 = 35; 35 : 9 = 3 (rest 8). Vi se spune deci: „câtul este 3, iar restul este mai mare decât 5". Ghicim: 3 x 4 + 3 = 15. Nu vă rămâne decât să spuneți amicului că a ales cifra 15. Demonstrați şi acest truc. În cursul demonstrației vă sfătuiesc să țineți seama de faptul că orice număr întreg (deci şi cel ales) poate fi reprezentat prin una din următoarele forme: 4***n***, ***4n*** + 1, 4***n*** + 2, 4***n*** + 3, unde litera ***n*** poate avea valorile 0, 1, 2, 3, 4 ...

Trucul 4. Procedați inițial ca în trucul precedent, adică propuneți-i prietenului să aleagă un număr, să-l adune cu jumătatea lui sau cu partea mare, apoi să adune la suma rezultată jumătatea ei sau partea mare. De data aceasta însă, în loc să-i cereți să împartă rezultatul cu 9, rugați-l să numească în ordinea lor (sute, zeci, unități), toate cifrele rezultatului obținut, afară de una singură - la alegerea lui - cu condiția ca această cifră să nu fie zero. Îi mai cereți să vă spună ordinul cifrei ascunse şi la care operație (la prima, la a doua, la prima şi la a doua sau niciodată) a trebuit să adauge partea mare a numărului.

Acum, pentru a afla numărul ales, faceți suma cifrelor care v-au fost comunicate, adunând în plus: 0 - dacă nu s-a adunat niciodată partea mare a numărului; 6 - dacă partea mare a fost adunată numai la prima operație; 4 - dacă partea mare a fost adunată numai la a doua operație; 1 - dacă partea mare a fost adunată în ambele operații. Apoi, în toate cazurile, suma rezultată trebuie completată până la cel mai apropiat multiplu al lui 9. Această completare va fi cifra ascunsă. Aşezând-o la locul (ordinul) indicat veți afla rezultatul exact la care a ajuns prietenul vostru.

Acum nu va fi greu să găsiți şi numărul ales. Pentru aceasta rezultatul obținut va trebui împărțit cu 9, câtul înmulțit cu 4 şi în funcție de rest veți adăuga la produs 1, 2 sau 3, după indicațiile de la trucul precedent.

Exemplul 1. A fost ales numărul 28. După ce au fost făcute operațiile cerute, a rezultat 63. Cifra 3-a unităților - a fost ascunsă şi ni se comunică 6 - cifra zecilor. Completând-o pe aceasta până la 9 obținem cifra unităților - 3. Rezultatul 63 a fost găsit. Numărul căutat va fi (63 : 9) x 4 = 28.

Exemplul 2. A fost ales numărul 125. După efectuarea tuturor operațiilor necesare a rezultat 282. Să presupunem că a fost ascunsă cifra sutelor - 2. Ni se comunică: am ascuns cifra sutelor, iar cifrele zecilor şi unităților sunt respectiv 8 şi 2; partea mare a numărului a fost adăugată numai la prima adunare. Ghicim: 8 + 2 + 6 = 16. Cel mai apropiat multiplu al lui 9 este 18. Deci, cifra ascunsă a sutelor este 18-16 = 2. Numărul ales va fi 282 : 9 = 31 (rest 3); 31 x 4 + 1 = 125.

Exemplul 3. Să admitem că cel care a ales numărul spune că ultimul rezultat obținut de el este compus din 3 cifre, prima fiind 1, iar ultima 7. Partea mare a fost adunată în ambele cazuri. Ghicim numărul ales: 1 + 7 + 1 = 9. Completarea până la multiplul lui 9 este zero sau nouă. Cum zero nu poate fi ascuns potrivit condiției, cifra ascunsă este 9 şi rezultatul întreg este 197. împărțim 197 cu 197 : 9 = 21 (rest 8). Numărul ales este 21 x 4 + 3 = 87. Demonstrați trucul. El nu este dificil, mai ales pentru cei care au înțeles esența demonstrației trucului precedent.

***Trucul* 5.** Alegeți un număr (mai mic de 100, pentru a nu complica calculul) şi ridicați-l la pătrat. Apoi adunați la numărul ales orice număr (n), pe care însă trebuie să mi-l spuneți. Suma obținută ridicați-o la pătrat. Aflați diferența dintre pătratele obținute şi spuneți-mi rezultatul. Pentru a ghici numărul ales, este suficient să împart jumătatea acestui rezultat la numărul (n) pe care l-ați adăugat la cel ales, iar din cât să scad o jumătate din numărul adunat.

Exemplu. S-a ales numărul 53; $53^2 = 2809$. La numărul ales s-a adăugat 6: $53 + 6 = 59$; $59^2 = 3481$; $3481 - 2809 = 672$. Rezultatul a fost comunicat.

Ghicim: 336 : 6 = 56; 6 : 2 = 3; 56 - 3 = 53. Numărul ales a fost 53.

Găsiți demonstrația.

Trucul 6. Propuneți unui prieten să aleagă un număr între 6 şi 60. Apoi să împartă pe rând numărul ales mai întâi la 3, apoi la 4 şi la 5 şi să vă spună resturile rămase de la fiecare împărțire. Cu ajutorul unei formule cheie, pe baza acestor resturi veți găsi numărul ales. Să notăm resturile cu r_1, r_2 şi r_3. Memorați acum următoarea formulă: $S = 40r_1 + 45r_2 + 36r_3$. Dacă vom obține S = 0, numărul ales este 60; dacă $S \neq 0$, restul rămas din împărțirea lui S cu 60 ne va da numărul ales.

Prietenul care a ales numărul nu va putea descoperi uşor secretul ghicirii.

Exemplu. S-a ales numărul 14. S-au comunicat resturile: $n = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$.

Ghicim: *S =* 40 - 2 + 45 - 2 + 36 - 4 = 314; 314 : 60 = 5 *rest 14.* Deci numărul ales este 14. Dar nu trebuie să aveți încredere oarbă într-o formulă care nu v-a fost demonstrată. Convingeți-vă mai întâi că această formulă este valabilă în toate cazurile, generalizând-o, şi numai după aceea aplicați-o în practică, numeric.

Trucul 7. După ce vă veți însuşi baza matematică a trucurilor de mai sus, veți putea să le modificați, să născociți alte reguli de ghicire a numerelor, să variați întrebările puse. Iată un exemplu de acest fel. În trucul precedent, în care trebuia să ghicim numărul ales după restul a trei împărțiri, au fost propuse ca divizori numerele 3, 4 şi 5. Să le înlocuim cu alți divizori, de exemplu 3, 5, 7 şi să extindem limitele între care pot fi alese numerele de pildă, între 7 şi 100. Desigur că factorii din formula-cheie se vor schimba şi ei. Care sunt noii factori?

Răspuns: $S = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3$, unde r_1, r_2 şi r_3 sunt resturile rămase din împărțirea numărului ales cu 3, 5 şi 7. Numărul ales este egal cu restul obținut prin împărțirea lui S la 105. Dacă S = 0, înseamnă că a fost ales 105, dar conform condițiilor prietenul nu poate alege decât numere între 7 şi 100.

277. Să ghicim rezultatul calculelor fără să întrebăm nimic

Matematica dispune de legi care permit să poată fi cunoscut dinainte rezultatul obținut în urma efectuării anumitor operații, oricare ar fi numărul inițial

ales. Aceste legi au dat naştere unor metode foarte interesante *de ghicire* a rezultatului unor calcule fără a întreba nimic pe cel care a ales numărul. Următoarele două trucuri vă vor ilustra afirmațiile de mai sus. Trucurile pot fi demonstrate practic, atât în fața unei singure persoane, cât şi în fața unui grup.

Trucul 1. Cereți ca numărul ales să fie înmulțit cu un număr pe care-l veți numi la întâmplare, iar la produsul obținut să se adune un alt număr, pe care-l veți numi de asemenea la întâmplare.

În sfârşit, suma obținută cereți să fie împărțită cu un al treilea număr oarecare, numit tot de voi. Între timp veți împărți în minte primul număr pe care l-ați numit voi cu al treilea şi veți cere persoanei căreia urmează să-i ghiciți rezultatul calculelor, să scadă de atâtea ori din câtul obținut numărul ales.

Rezultatul îl puteți ghici uşor. El va fi egal cu câtul obținut din împărțirea celui de al doilea cu al treilea din numerele propuse de voi.

Exemplu. Să presupunem că un prieten a ales. Cereți ca acest număr să fie înmulțit cu 4 (rețineți numărul, fiind primul). Produsul este 24. Rugați-l să adauge 15 (al doilea număr); rezultă 39. Spuneți-i să împartă suma cu 3 (al treilea număr); rezultă 13. Între timp, ați împărțit în minte $4 : 3 = 1\frac{1}{3}$. Cereți prietenului să scadă din câtul obținut de el 13 o dată numărul ales şi încă o treime din acest număr. El va scădea 6 + 2, adică 8 şi va obține 13 - 8 = 5.

Împărțind în minte cel de al doilea număr pe care l-ați propus 15 cu al treilea 3, veți obține de asemenea 5. Demonstrați că această coincidență a rezultatelor nu este întâmplătoare, ci stabilită pe bază de lege.

Trucul 2. Scrieți un număr între 1 şi 50 pe o bucățică de hârtie şi împăturiți-o, fără să arătați participanților numărul scris. La rândul său, fiecare dintre participanți să aleagă un număr mai mare ca 50, dar mai mic ca 100, şi, fără să vi-l arate, să facă următoarele operații:

1) Să adune numărul său cu 99 - *x*, *x* fiind numărul pe care l-ați notat pe hârtie (această diferență o veți calcula în minte, spunându-le participanților numai rezultatul);

2) Să şteargă ultima cifră din stânga sumei obținute şi s-o adune la numărul rămas;

3) Din numărul inițial ales de fiecare participant să se scadă numărul obținut la punctul 2.

După efectuarea acestor trei operații, toți participanții vor ajunge la acelaşi număr, care este identic cu cel pe care l-ați notat pe hârtia ascunsă.

Exemplu. Fie 18 numărul pe care l-ați scris voi, şi 64 numărul ales de unul din participanți. Cereți-i să adune 99 - 18 = 81. Va obține: 64 + 81 = 145. Cifra 1 se anulează şi se adună la numărul rămas: 45 + 1 = 46. Diferența dintre numărul inițial ales 64 şi cel obținut 46 este 64 - 46 = 18, adică numărul scris pe biletul ascuns; 18.

Ca întotdeauna, căutați şi aici să stabiliți în primul rând baza matematică a operațiilor indicate.

278. Voi afla cine şi cât a luat

Cereți primului participant să ia un număr oarecare de obiecte (chibrituri, monede) multiplu cu 4 adică 4***m***. Al doilea participant să ia de ***m*** ori câte 7 obiecte, (deci 7***m***). În sfârşit, al treilea participant va fi rugat să ia de tot atâtea ori câte 13 obiecte (adică 13*m*). Apoi, al treilea participant să dea din obiectele luate primului şi celui de al doilea atâtea cât au luat ei. Acum îi spuneți celui de al doilea participant să dea celui de al treilea şi primului atâtea obiecte câte au în acel moment. După aceea primul să procedeze la fel.

Întrebați-l pe unul dintre participanți câte obiecte are. Numărul pe care vi-l spune împărțiți-l cu doi. Câtul va arăta câte obiecte a luat inițial primul participant. împărțiți acest număr cu 4 şi înmulțiți câtul cu 7. Veți obține numărul obiectelor luate de al doilea participant, iar al treilea a luat de atâtea ori câte 13 obiecte, de câte ori al doilea a luat câte 7 obiecte.

Aflarea bazei matematice a acestui truc este foarte uşoară.

279. Una, două, trei încercări şi... am ghicit

Alegeți două numere întregi pozitive. Adunați suma numerelor alese cu produsul lor şi spuneți-mi rezultatul. După cum un sportiv sare o înălțime după una sau două încercări, tot aşa mă prind să ghicesc foarte repede numărul pe care l-ați ales, poate însă nu din prima încercare. Metoda este simplă, fără a fi evidentă. La rezultatul comunicat voi aduna 1, iar numărul obținut îl voi descompune în 2 factori, după care voi micşora cu 1 fiecare factor.

Exemplul 1. Mi s-a spus numărul 34. Calculez: 34 + 1 = 35; 35 = 5 x 7 şi 35 = 35 x 1. Prin urmare numerele alese sunt 4 şi 6 sau 34 şi 0. Pot să vă propun să scădeți suma numerelor alese din produsul lor. Acum, ca să le aflu, voi mări iarăşi cu o unitate rezultatul comunicat, voi descompune numărul obținut în 2 factori, dar de astă dată voi aduna o unitate la fiecare.

Exemplul 2. Se comunică 64. Calculez: 64 + 1 = 65; 65 = 13 x 5 sau 65 = 65 x 1. Prin urmare, cifrele alese sunt 14 şi 6 sau 66 şi 2. Demonstrați valabilitatea acestui procedeu de ghicire.

280. Cine a luat radiera şi cine a luat creionul?

Întoarceți-vă cu spatele şi cereți ca doi dintre cei prezenți, de exemplu Costel şi Ionel, să ia -unul creionul, iar celălalt - radiera. Apoi veți spune:

- Celui care a luat creionul îi dau numărul 7, iar celui care a luat radiera, îi dau numărul 9 (puteți da şi alte numere, cu condiția obligatorie ca unul din ele să fie număr prim, iar celălalt un număr compus, dar care nu se împarte cu primul).

- Costele, înmulțeşte numărul tău cu 2, iar tu, Ionele, înmulțeşte-ți numărul cu 3. Aceste două numere trebuie să fie prime - ca, de exemplu, 3 şi 2 -, iar unul trebuie să se cuprindă de un număr întreg de ori în numărul compus dat de voi - de exemplu 3 şi 9.

- Adunați rezultatele şi spuneți-mi suma sau spuneți-mi dacă această sumă se împarte la 3 fără rest (adică, la numărul ales de voi, care este unul din factorii numărului compus).

Acum puteți stabili imediat cine a luat creionul şi cine a luat radiera. Într-adevăr, dacă suma obținută se împarte la 3, înseamnă că cu 3 a fost înmulțit numărul care nu se împarte la 3, adică 7. Ştiind cine şi-a înmulțit numărul cu 3 (Ionel) şi că numărul 7 l-ați dat celui care a luat creionul, puteți spune că acesta se află la Ionel. Invers, dacă suma rezultată nu se împarte la 3, înseamnă că cu 3 a fost înmulțit numărul care se împarte la 3, adică 9. În acest caz, Ionel a luat radiera.

Cum veți demonstra matematic acest truc?

281. Ghicirea a trei termeni aleşi şi a sumei

Cereți oaspeților să scrie trei numere consecutive, mai mici ca 60 (de exemplu, 31, 32, 33). Îi veți ruga să aleagă un multiplu al lui 3 mai mic de 100 şi să vi-l comunice (de exemplu, 27). Acest număr trebuie să-l rețineți. În continuare, rugați-i să adune toate cele patru numere (31 + 32 + 33 + 27 = 123), şi să înmulțească suma cu 67: 123 x 67 = 8241. Acum, să vă spună numai ultimele două cifre ale produsului şi veți afla imediat întregul rezultat, precum şi cele trei numere alese.

Metoda de ghicire. Se împarte 27 la 3. La câtul rezultat (9) adunăm 1 şi obținem numărul cheie (10). Scăzându-l din numărul format de ultimele două cifre cunoscute ale produsului (41 - 10 = 31), vom obține numărul cel mic din cele 3 alese. Dublându-l pe 41 vom obține 82 - primele cifre ale rezultatului. Demonstrarea acestei metode de ghicire constituie o problemă destul de interesantă. Încercați s-o rezolvați!

282. Să ghicim mai multe numere alese

Există o metodă simplă de a ghici câteva numere formate dintr-o singură cifră. Cereți ca primul număr ales să fie înmulțit cu 2, iar la produs să se adune 5. Suma obținută să fie înmulțită tot cu 5, iar la produs să se adune 10. La acest rezultat se va aduna al doilea număr ales. Dacă s-au ales mai multe numere decât două, suma va fi înmulțită cu 10 şi apoi se va aduna al treilea număr ales; se va înmulți iarăşi cu 10 şi se va aduna al patrulea număr ales, ş.a.m.d. Să vi se comunice - când va fi adunat ultimul număr ales - suma finală şi câte numere au fost alese. Pentru ghicirea numerelor trebuie să scădeți din suma anunțată:

35, dacă s-au ales 2 numere;

350, dacă s-au ales 3 numere;

3500, dacă s-au ales 4 numere;

.....

Cifrele din care este compusă diferența vor fi numerele alese.

Exemplu. Au fost alese numerele 3, 5, 8 şi 2. Dublăm primul: 3 x 2 = 6; adunăm 5 obținând 6 + 5 = 11; înmulțim cu 5, deci: 11 x 5 = 55; adunăm 10 la rezultatul precedent: 55 + 10 = 65; adunăm al doilea număr ales: 65 + 5 = 70; înmulțim cu 10: 70 x 10 = 700; adunăm al treilea număr ales: 700 + 8 = 708; înmulțim cu 10: 708 x 10 = 7080 şi adunăm al patrulea număr ales 7.080 + 2 = 7.082. Din această sumă scădem 3500 obținând diferența 3582. Cifrele acestei diferențe reprezintă numerele alese.

Demonstrați baza matematică a acestui procedeu de ghicire a numerelor alese.

Notă. Acest truc poate fi prezentat sub forma ghicirii punctelor unui zar, aruncat pe rând de cei prezenți.

283. Câți ani ai?

- Nu vrei să-mi spui? Ei bine, spune-mi numai cât va rămâne dacă, dintr-un număr de 10 ori mai mare decât anii dumitale, vom scădea produsul cu 9 al unui număr cu o singură cifra.

Mulțumesc, acum ştiu câți ani ai.

Modul de ghicire. Pentru a afla vârsta, este suficient să separăm cifra unităților numărului comunicat şi s-o adunăm cu numărul rămas.

Exemplu. Din numărul 170, care este de 10 ori mai mare decât numărul de ani (17), s-a scăzut, de exemplu, 27 = 9 x 3 şi s-a anunțat rezultatul: 143. Separăm 14 de 3 şi adunăm 14 + 3 = 17 stabilind vârsta. Trucul este uşor şi de mare efect! Dar, pentru a evita un eşec, analizați baza lui matematică.

284. Alt truc pentru ghicirea vârstei

Pentru variație putem cere ca numărul anilor să fie înmulțit cu 2, la produs să se adune 5, iar suma să fie înmulțită tot cu 5 şi să ni se comunice rezultatul. Evident că ultima cifră a rezultatului va fi 5. O vom elimina, iar din numărul rămas vom scădea 2. Diferența va fi vârsta căutată.

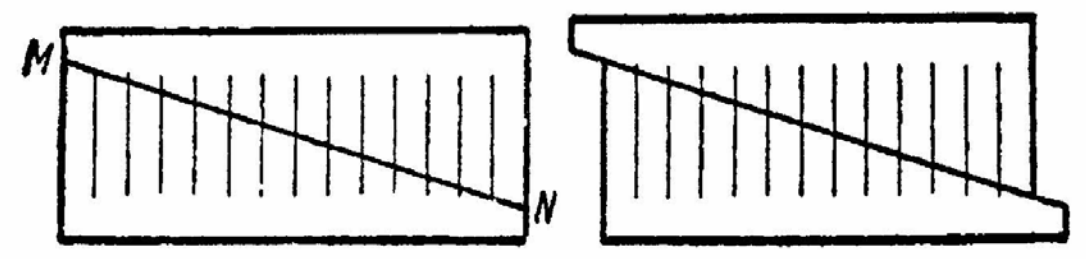
Exemplu: Să admitem că vârsta este de 21 de ani. Efectuăm operațiile necesare: 21 x 2 = 42, 42 + 5 = 47, 47 x 5 = 235. Ghicim vârsta: 23 - 2 = 21.

Demonstrați şi această variantă de ghicire a vârstei.

285. O scamatorie geometrică (dispariția misterioasă)

Pe o bucată dreptunghiulară de carton desenați, la distanțe egale, 13 linii groase de aceeaşi lungime, aşa cum se arată mai jos. Acum tăiați dreptunghiul pe linia oblică MN, care uneşte limita superioară a ultimei linii din stânga cu limita inferioară a ultimei linii din dreapta.

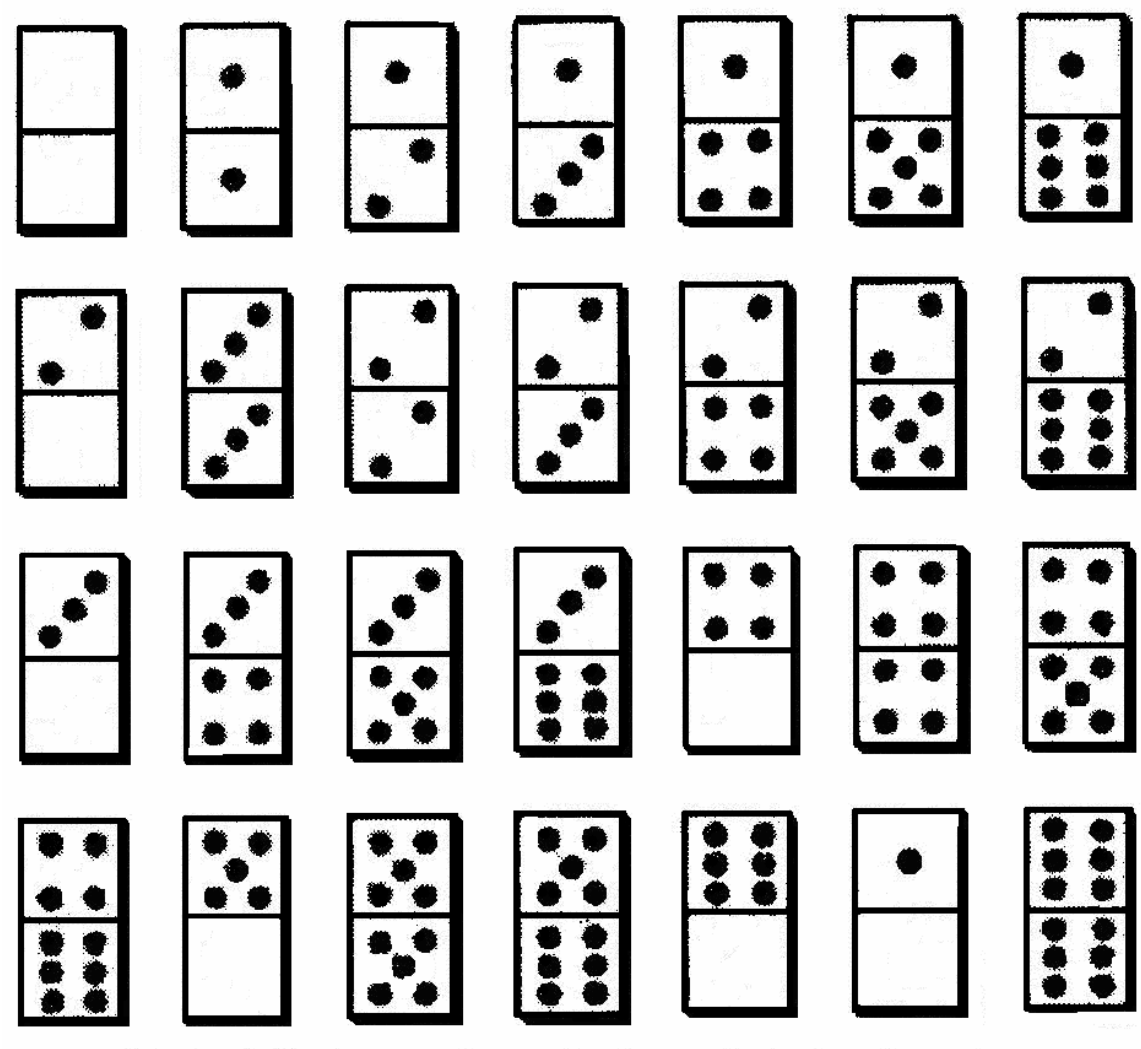
Deplasați jumătățile dreptunghiului de-a lungul liniei de tăiere, aşa cum se arată în desen. Veți constata un fenomen ciudat: în loc de 13 linii vor fi numai 12; unde a dispărut o linie?



Capitolul 9 Dominoul şi zarul

A. DOMINOUL

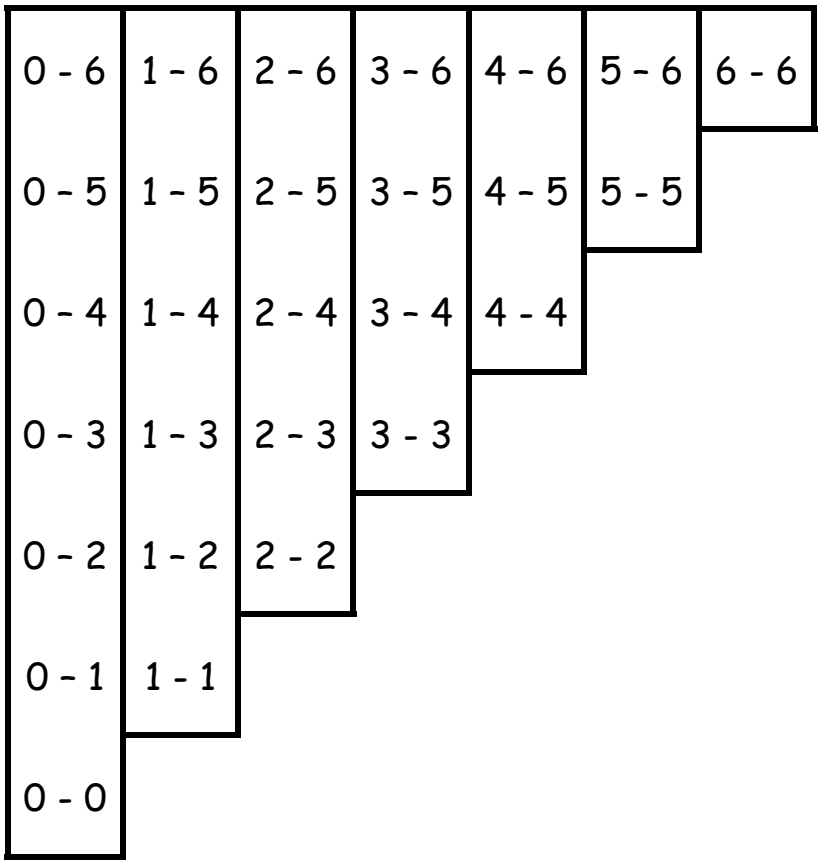
Jocul de ***domino*** constă de cele mai multe ori din 28 de piese dreptunghiulare numite pietre.



Fiecare piatră este împărțită în două pătrate, pe care sunt desenate puncte. În pătrate, punctele sunt astfel repartizate, încât grupul de puncte de pe fiecare piatră reprezintă una din combinațiile posibile din 7 numere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 luate câte două. Astfel, fiecare piatră de domino este caracterizată prin două numere: prin numărul punctelor pe care le conține unul din pătrate şi prin numărul punctelor pe care le conține celălalt pătrat. Suma tuturor punctelor de pe o piatră determină numărul punctelor ei. Dacă ambele jumătăți ale pietrei conțin un număr identic de puncte sau dacă ambele sunt goale, piatra poartă denumirea de dublă. Uneori, în loc să desenăm piatra, vom scrie pur şi simplu alături (cu linioară între ele) cele două cifre care indică numărul de puncte de pe fiecare jumătate a pietrei.

De pildă, semnul 0-5 reprezintă piatra care într-un pătrat are puncte (0), iar în celălalt are cinci puncte (5); semnul 4-6 reprezintă piatra cu 4 şi respectiv 6

puncte etc. Jocul de domino este atât de cunoscut de toată lumea, încât nu-i nevoie să-l mai descriem. Voi aminti numai regula principală: lângă oricare din pătratele pietrei puse pe masă poate fi adăugată o piatră care să aibă un pătrat cu acelaşi număr de puncte ca şi pătratul pietrei aşezate pe masă. Reprezentarea grafică a celor 28 de pietre de domino poate fi dispusă în felul următor:



Prin el însuşi, jocul de domino nu prezintă un interes matematic deosebit. Dacă aveți însă un joc de domino, puteți rezolva cu ajutorul lui următoarele probleme şi şarade interesante.

286. Câte puncte?

Bazându-vă pe regula principală a jocului de domino, rezolvați următoarea problemă:

Toate cele 28 de pietre de domino sunt aşezate pe masă în lanț, potrivit cu regulile jocului, astfel încât ultimul pătrat de la unul din capete are cinci puncte.

Câte puncte trebuie să aibă pătratul de la celălalt capăt al lanțului? La început rezolvați, în minte, apoi verificați practic.

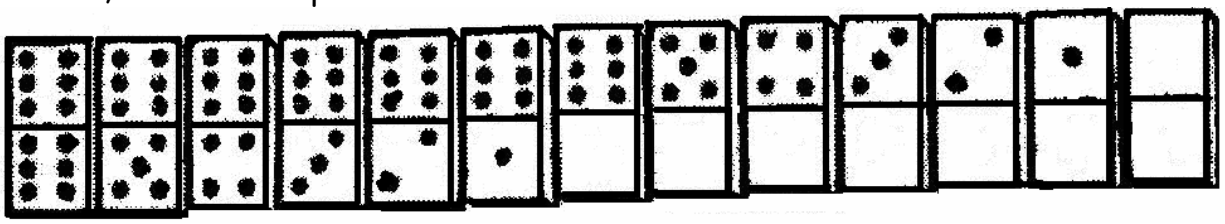
287. Două trucuri

Primul truc. Ascunzând pe neobservate o piatră de domino (în afară de dublă) şi căutând să nu atrageți atenția prietenilor că au rămas numai 27 de pietre, propune-le să aranjeze toate pietrele în formă de lanț, după regulile jocului, începând cu orice piatră (le puteți permite să nu aşeze dublele). Ei vor putea fără nici o dificultate să îndeplinească această propunere. Tu le vei indica dinainte

numărul de puncte care vor fi la capetele lanțului. Acestea vor fi punctele pe care le conțin pătratele pietrei de domino pe care ai ascuns-o. De ce?

Al doilea truc. Ia 25 de pietre de domino, întoarce-le cu fața în jos şi aşează-le în rând, una după alta, astfel încât să se atingă pe laturile mai lungi. Spune apoi prietenilor că te vei întoarce cu spatele sau te vei retrage în altă cameră, iar ei să mute un număr oarecare de pietre (dar nu mai multe de 12) de la capătul din dreapta în cel din stânga.

Te angajezi să ghiceşti câte pietre au fost mutate. Pregătindu-te pentru ghicit şi întorcând pietrele de domino cu fața în jos, aşează 13 din ele în ordinea descrescândă a numerelor întregi, de la 12 la 0, iar în dreapta lor aşează, în mod arbitar, restul de 12 pietre.



Pietrele sunt aşezate în ordine descrescândă

Revenind în cameră, întoarce piatra din mijloc (adică a 13-a la număr socotind de la unul din capete) şi numărul punctelor ei îți va indica numărul pietrelor de domino mutate în lipsa ta.

Care este explicația?

288. Câştigarea partidei este asigurată

Să admitem că patru oameni joacă domino: A şi B împotriva lui C şi D. Înainte de începerea jocului, pietrele sunt împărțite în mod egal, adică fiecare jucător are câte 7 pietre. Vom încerca să explicăm de ce depinde câştigarea partidei. Fireşte că într-o oarecare măsură ea depinde de iscusința jucătorilor. Sunt posibile însă şi asemenea cazuri de împărțire inițială a pietrelor între cele două perechi de jucători, când prima pereche câştigă neapărat, adică unul din jucătorii ei va depune înaintea celorlalți toate pietrele.

De pildă, A are următoarele pietre: 1-0, 1-1, 1-2, 1-3, 0-4, 0-5, 0-6, iar D are restul pietrelor cu 0 şi 1, adică: 0-0, 0-2, 0-3, 1-4, 1-5, 1-6 şi încă o piatră oarecare. Restul pietrelor le au jucătorii B şi C şi repartiția lor nu influențează cu nimic jocul. În acest caz, jocul se va reduce la un duel între jucătorul A din prima pereche şi jucătorul D din a doua pereche, iar ceilalți doi jucători (B şi C) nu vor putea depune nici măcar o singură piatră. Jucătorul A începe şi depune: 1-1; B şi C sunt înciudați: nu au nici o piatră potrivită; D poate depune oricare din cele 3 pietre: 1-4, 1-5 sau 1-6. După aceasta, A trebuie să depună 4-0, 5-0 sau 6-0. B şi C spun din nou *pas,* întrucât nu au pietre cu unu sau cu zero. D poate depune oricare din pietrele rămase, iar A are întotdeauna la îndemână un răspuns care creează la capetele lanțului fie 0, fie 1.

În cele din urmă A depune toate pietrele, B şi C niciuna, iar D rămâne cu una. Partida a fost câştigată de către perechea A şi D (jucați această partidă de la început până la sfârşit). La împărțirea inițială a pietrelor de domino între jucători,

combinațiile cu zero şi unu pot fi înlocuite cu combinațiile corespunzătoare ale cifrelor 2, 3, 4, 5 şi 6. E uşor să ne dăm seama că numărul partidelor similare cu cea analizată este egal cu numărul tuturor combinațiilor simple din şapte elemente luate câte 2, adică numărul este egal cu 21. Probabilitatea unei asenenea împărțiri întâmplătoare a pieselor este însă extrem de mică.

În exemplul citat, partida a continuat până când unul din jucători a depus toate pietrele. Se întâmplă însă şi altfel: după câteva depuneri jocul se închide, deoarece nici un jucător nu are piatra potrivită. În acest caz, partida se consideră câştigată de jucătorii la care suma punctelor de pe pietrele rămase este mai mică.

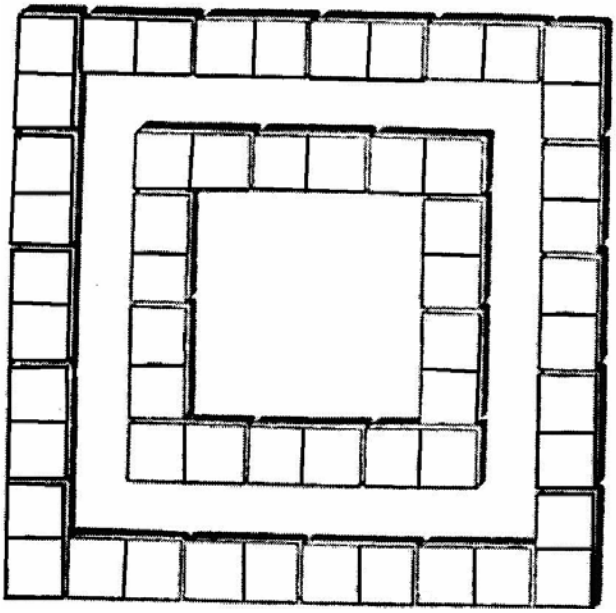
Încercați să aflați, după datele indirecte ale unei asemenea partide scurte, ce pietre au fost puse pe masă. Joacă perechile: A cu C şi B cu D. Fiecare are câte 6 pietre, iar 4 pietre sunt necumpărate şi jucătorii, au înțeles să nu cumpere. Pietrele jucătorului, A sunt cunoscute: 2-4, 1-4, 0-4, 2-3, 1-3, 1-5. Partenerul său C are 5 duble. D are două duble, iar suma punctelor de pe toate pietrele lui este 59. Jucătorul A începe jocul cu piatra 2-4, B pasează, C depune, D pasează, A depune, B pasează din nou, C depune şi închide jocul. Perechea B şi D a pierdut partida fără să depună nici o piatră. Partenerii A şi C au în mână 35 de puncte, iar partenerii B şi D - 91 de puncte. Suma punctelor de pe cele 4 piese depuse este egală cu 22. Determinați, după aceste date, cele 4 piese care au rămas necumpărate şi care sunt cele 4 piese depuse.

289. Rama

Depunând pietrele de domino, potrivit regulilor jocului, formați o ramă pătrată. Folosiți toate cele 28 de pietre şi aranjați-le astfel încât de-a lungul fiecărei laturi a pătratului suma punctelor să fie egală cu 44.

290. Ramă în ramă

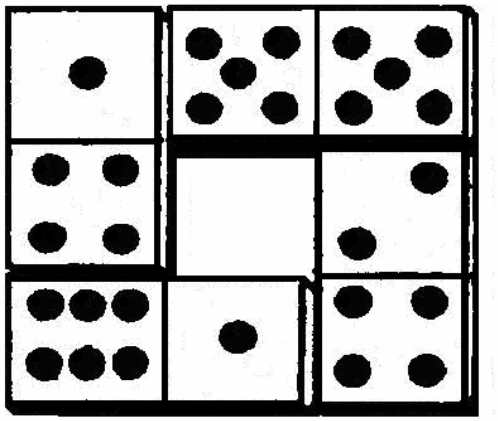
Aranjați cele 28 pietre de domino aşa cum se vede mai jos. Se cere ca de-a lungul fiecărei din cele 8 laturi ale figurii suma punctelor să fie identică.



Se admite aşezarea pietrelor după bunul plac, adică nu mai este necesar să se respecte regula jocului.

291. Ferestruici

Din piese de domino se pot forma ferestruici cu sume de puncte identice de-a lungul fiecărei laturi. Folosind toate cele 28 de piese de domino, formați 7 ferestruici de acest fel, printre care să nu fie ferestruica următoare.



Observații:

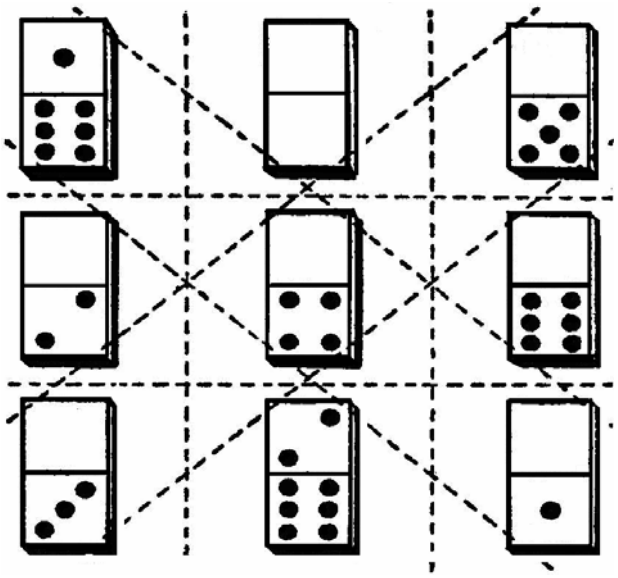
1) Numărul punctelor din pătratele de la colțuri se socoteşte de 2 ori: de-a lungul laturii orizontale şi de-a lungul laturii verticale.

2) Suma punctelor trebuie să fie egală numai de-a lungul laturilor unei ferestruici; cu alte cuvinte, la fiecare ferestruică suma punctelor laturilor poate fi diferită de a celorlalte ferestruici.

292. Pătrate magice din pietre de domino

Din pietre de domino se pot forma nu numai ferestruici şi rame, dar şi pătrate magice. Dacă aranjăm în formă de pătrat pietre cu semne diferite, în aşa fel ca suma punctelor din fiecare rând, atât orizontal, cât şi vertical, precum şi din fiecare din cele două diagonale să fie identică, pătratul rezultat se numeşte magic. Astfel, de pildă, din cele 7 pietre albe (aşa sunt denumite pietrele de domino care nu au pe una sau pe ambele jumătăți nici un punct) şi încă 2 pietre (1-6 şi 2-6) este foarte uşor să se alcătuiască un pătrat magic cu suma constanta 12.

Indicație. În acest pătrat magic, ca şi în celelalte pătrate formate din pietre de domino, se numeşte rând, coloană sau diagonală fâşia care cuprinde şirul corespunzător de pietre.



Pătrat magic cu suma 12

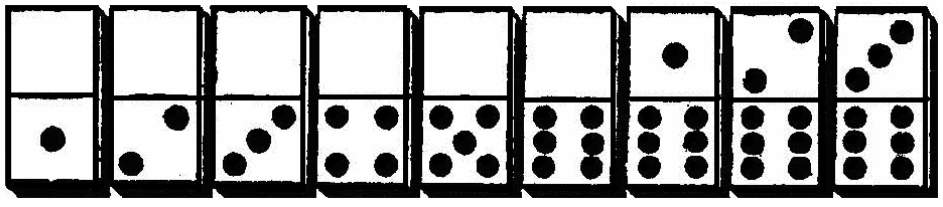
Pentru reprezentarea pătratului-domino magic este mai comodă următoarea notație:

1 – 6	0 – 0	0 – 5
0 – 2	0 – 4	0 – 6
0 – 3	2 – 6	0 - 1

sau în numere

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Este interesant de observat că numărul punctelor celor 9 pietre folosite reprezintă primele 8 numere din seria naturală 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 0. Dacă luăm însă 9 pietre, ale căror puncte ne dau primele nouă numere din seria numerelor naturale, de pildă cele din figura următoare, atunci putem forma un pătrat magic cu suma constantă 15. Construcții similare se pot alcătui din pietre care conțin toate pătratele cu 2, 3 sau 4 puncte şi încă 2 pietre.



Primele nouă numere ale şirului natural

Constantele (sumele constante) acestor pătrate vor fi 18, 20 sau 24. Se pot construi pătrate magice şi dintr-un număr mai nare de pietre: din 16, 25 etc; de data aceasta se admite repetarea numerelor.

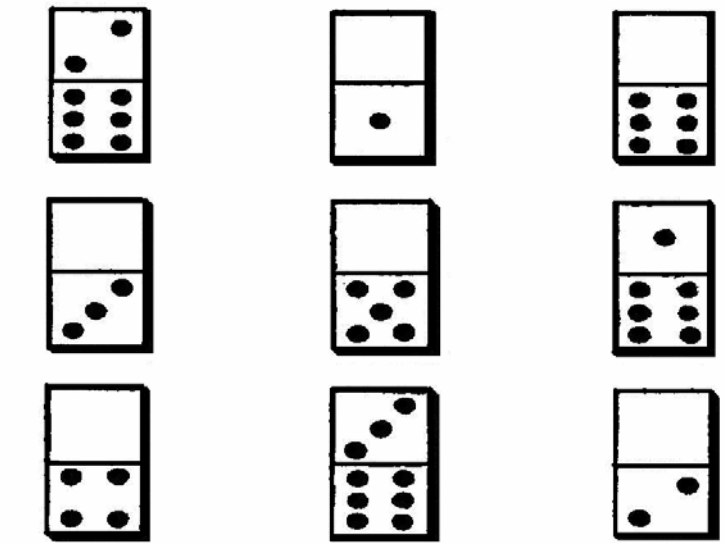
Ca exemplu dăm mai jos schema unui pătrat magic cu constanta 18, alcătuit din 14 pietre de domino:

2 – 6	1 – 2	1 - 3	0 - 3
1 – 4	0 – 2	3 - 6	1 - 1
0 – 5	1 – 5	0 – 1	0 - 6
0 – 0	2 – 5	0 - 4	1 – 6

El este alcătuit din pietre care conțin toate formațiile cu 0, 1 şi încă 3 pietre: 2-5; 2-6; 3-6. Suma punctelor din fiecare coloană, fiecare rând şi fiecare diagonală a acestui pătrat este egală cu 18. Unele pietre conțin un număr egal de puncte, de pildă, 1 + 4 = 0 + 5 (prima coloană), 2 + 5 = 1 + 6 (ultimul rând) etc. Pătratul obținut mai are încă o proprietate interesantă, şi anume că prima coloană poate fi mutată pe locul patru, iar rândul de sus poate fi mutat jos, obținându-se un nou pătrat magic.

Dacă în acest pătrat toate pietrele care conțin cifra 0 şi 1 vor fi înlocuite cu pietre care au un număr de puncte mai mare cu unu, cu doi sau cu trei, se vor obține noi pătrate magice. În sfârşit, dacă în oricare din aceste pătrate vom înlocui fiecare piatră cu o piatră *complimentară,* vom obține din nou un pătrat magic.

Pietrele de domino se numesc *complimentare* dacă numărul punctelor din pătratele unei pietre completează până la şase numărul punctelor din pătratele altei pietre. Aşa sunt, de pildă, pietrele 2-3 şi 4-3, sau 1-2 şi 5-4 etc. În completul de 28 de pietre există 4 pietre: 0-6; 1-5; 4-2 şi 3-3 care se *completează* singure.

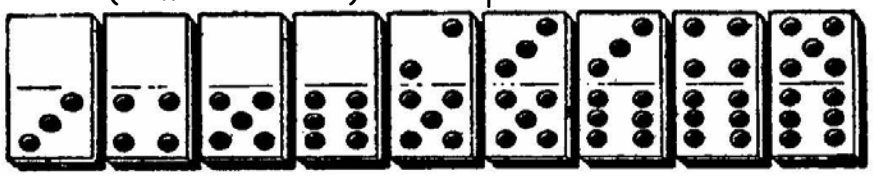


Pătrat magic cu suma 15

După cum vedeți, dominoul ne oferă un bogat material pentru exerciții cu pătrate magice. Rezolvați acum următoarele probleme:

Problema 1. Alcătuiți din cele nouă pietre din figura următoare un pătrat magic cu constanta 21.

Problema 2. Alegeți nouă pietre de domino, al căror număr de puncte formează seria consecutivă 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 şi 12, şi alcătuiți din ele un pătrat magic. Care este constanta (suma constantă) acestui pătrat?

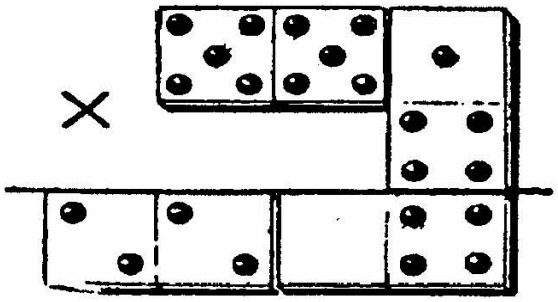


Problema 3. Alegeți 16 pietre de domino, cu următoarele sume de puncte: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9 şi 10 şi formați din ele un pătrat magic.

Problema 4. Alcătuiți un pătrat magic cu constanta 27 din următoarele 25 de pietre: 0-0, 0-1, 0-2,1-1, 0-3, 1-2, 0-4, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 5-0, 1-5, 6-0, 4-2, 3-3, 1-6, 3-4, 2-5, 2-6, 3-5, 4-4, 4-5, 6 -3, 6-4.

293. Înmulțire cu pietre de domino

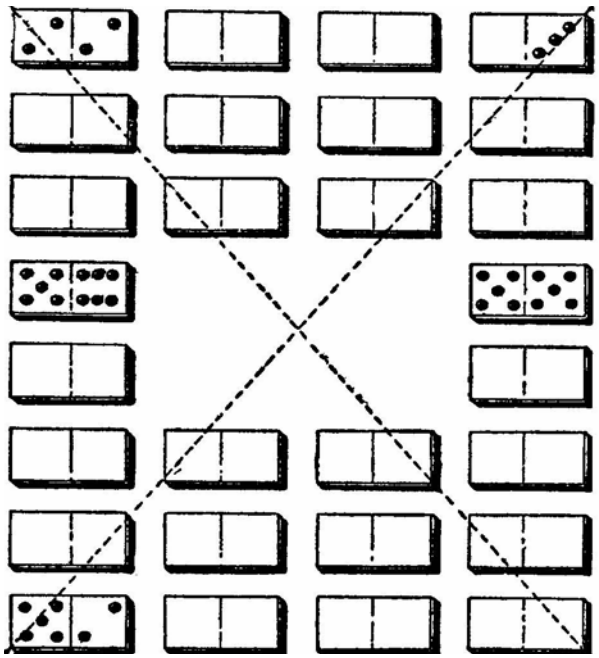
Cu ajutorul a patru piese de domino am înfățişat înmulțirea unui număr de 3 cifre (numărul 551) cu altul de o cifră (numărul 4): 551x4 = 2204. încercați să aşezați toate cele 28 de pietre de domino astfel încât să se obțină 7 înmulțiri analoage cu cea arătată în figura următoare:



Şase înmulțiri le veți construi fără prea multă bătaie de cap. A şaptea vă va cere însă ceva mai mult timp.

294. Pătrat magic cu fereastră

După schema arătată mai jos, alcătuiți din toate cele 28 de pietre un pătrat cu fereastră dreptunghiulară în mijioc, în aşa fel ca suma punctelor în fiecare din cele opt rânduri, opt coloane şi două diagonale (indicate prin linii punctate) să fie egală cu 21.



Aici, spre deosebire de problemele precedente, fiecare jumătate de piatră are o valoare independentă la adunarea punctelor pe verticală şi diagonală. În schema de mai sus, al patrulea rând orizontal de sus este completat în întregime. Suma punctelor lui: 5 + 6 + 5 + 5 = 21. Se indică de asemenea pietrele care trebuie aşezate în colţurile pătratului.

295. Ghicirea pietrei de domino alese „în gând"

Propuneţi prietenilor să aleagă în gând o piatră de domino. Cereţi-le să efectueze succesiv următoarele operaţii:

1) să înmulţească cu 2 numărul punctelor din oricare jumătate a pietrei la care s-au gândit;

2) să adune la produs un număr ***m*** pe care-l indicaţi la întâmplare;

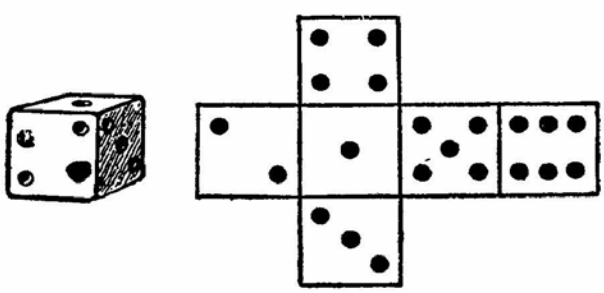
3) să înmulţească cu 5 suma obţinută;

4) să adauge la produs numărul punctelor din a doua jumătate a pietrei la care s-au gândit.

Întrebaţi-i rezultatul final şi scădeţi din el 5***m***. Cele două cifre ale numărului obţinut vă vor indica numărul punctelor din cele două jumătăţi ale pietrei la care s-au gândit. Să presupunem, de pildă, că ei s-au gândit la piatra 6-2. Au înmulţit 6 cu 2 şi au adunat, la cererea voastră numărul ***m*** = 3, obţinând totalul de 15. Au înmulţit 15 cu 5 şi au adunat cele 2 puncte ale jumătăţii a doua a pietrei la care s-au gândit. Rezultatul final este 77. Scădeţi 5***m*** = 15. Veţi obţine: 77 - 15 = 62. Piatra de domino la care s-au gândit este 6-2. Puteţi să explicaţi de ce se întâmplă aşa?

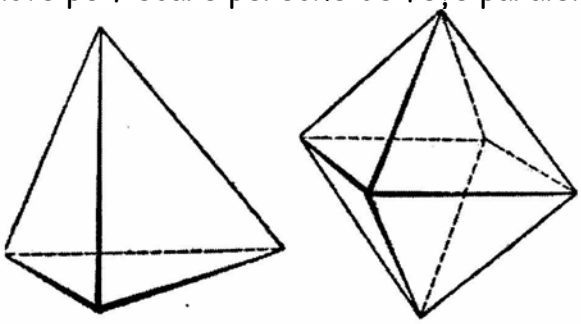
B. ZARUL

Zarul este un cub pe suprafaţa căruia sunt scobite nişte puncte. Pe o faţă - un punct, pe a doua - 2 puncte, pe a treia - 3, pe restul feţelor - respectiv 4, 5 şi 6 puncte, după cum se vede în figura de mai jos:



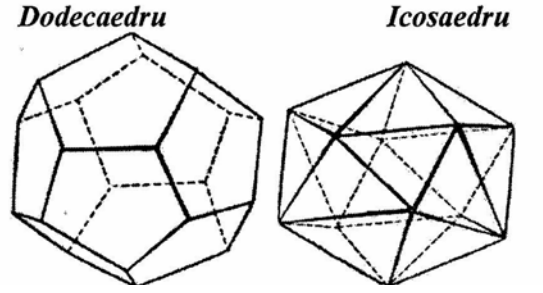
Numărul punctelor de pe o față a zarului - cea superioară - determină după rostogolire câte puncte a totalizat jucătorul. Punctele sunt astfel dispuse pe suprafața zarului, încât *suma punctelor de pe fețele opuse este egală cu* 7. De ce tocmai cubul (zarul) a fost poliedrul cel mai potrivit pentru joc? În primul rând este evident că zarul trebuie să fie un poliedru regulat, întrucât numai în acest caz la aruncare toate fețele lui au *şanse egale* să ajungă în poziția de sus.

Dar din cele 5 feluri de poliedre regulate, cel mai potrivit este, fireşte, cubul: confecționarea lui nu prezintă dificultăți prea mari, iar la aruncare se rostogoleşte destul de uşor. Dacă toate cele 5 poliedre regulate ar fi aruncate cu aceeaşi forță, tetraedrul şi octaedrul abia s-ar rostogoli, cubul se va rostogoli mai bine, iar dodecaedrul şi icosaedrul sunt atât de rotunde, încât se vor rostogoli aproape ca o sferă. Cele şase fețe ale cubului au dus la ideea să se folosească primele 6 numere naturale, iar aşezarea paralelă a celor 2 fețe opuse reciproc a permis ca aceste numere să fie dispuse firesc într-o anumită ordine şi într-un anumit sens, simetric (suma numărului de puncte pe fiecare pereche de fețe paralele este egală cu 7).



Tetraedru ***Octaedru***

Principiul numărului şapte este cheia pentru rezolvarea diferitelor probleme - trucuri cu unul sau mai multe zaruri.



Dodecaedru ***Icosaedru***

Celor care nu au sesizat încă această particularitate în dispunerea punctelor pe fețele zarului nu le va fi uşor să afle secretele ghicirilor.

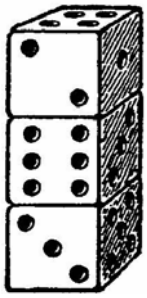
296. Truc aritmetic cu zaruri

Sunt necesare 3 zaruri. „Fachirul" se întoarce; cineva din public aruncă pe masă 3 zaruri. „Fachirul" propune publicului să totalizeze punctele de pe fețele superioare ale celor trei zaruri, apoi să ridice un zar oarecare şi să adune la suma precedentă numărul punctelor de pe fața inferioară a zarului ridicat. În continuare, „fachirul" propune ca zarul ridicat să fie aruncat din nou şi numărul punctelor de pe fața superioară să fie adunat şi el la suma obținută anterior. După aceasta „fachirul" se întoarce, aminteşte publicului că el nu ştie care dintre zaruri a fost aruncat a doua oară, ia în mâini cele 3 zaruri, le scutură (pentru a crea o atmosferă de mister) şi, spre mirarea publicului, ghiceşte rezultatul final al operațiunilor aritmetice efectuate.

Metoda ghicirii. Înainte de a lua zarurile în mână, adunăm punctele de pe fețele superioare şi adăugăm 7. Suma obținută va fi tocmai aceea care trebuie ghicită. Gândiți-vă de ce se întâmplă astfel?

297. Ghicirea sumei punctelor de pe fețele ascunse

Aşezați 3 zaruri unul peste altul.



Aruncând privirea numai pe fața de sus a coloanei sau numai pe două din fețele lui laterale, puteți preciza dintr-o dată suma punctelor de pe fețele cu care zarurile vin în contact şi de pe fața cea mai de jos. De pildă, în poziția zarurilor din figura de mai sus, suma căutată va fi 17. Stabiliți regula după care trebuie să ne călăuzim pentru a ghici suma punctelor ascunse.

298. În ce ordine sunt aşezate zarurile

Dați-le prietenilor trei zaruri, o bucățică de hârtie, un creion şi propuneți-le ca, după ce aşează în rând zarurile, să citească în gând numărul de trei cifre, format de numerele punctelor de pe fețele de sus ale fiecărui zar. De pildă, dacă zarurile sunt aşezate ca în figura:



Fațetele de sus formează numărul 254

aceasta va fi numărul 254. Să adauge la acest număr - în aceeaşi ordine - cele trei cifre care reprezintă numărul punctelor de pe fețele de jos ale zarurilor. Se va obține un număr cu şase cifre. În exemplul nostru, 254.523. Propuneți să împartă numărul cu şase cifre la 111 şi să vă spună rezultatul.

Fără să faceți înmulțirea, puteți preciza foarte repede primele trei cifre ale acestui număr cu şase cifre şi, prin urmare, să spuneți în ce ordine erau aşezate zarurile.

Metoda ghicirii. Se scade 7 din câtul anunțat, iar diferența se împarte la 9. Cifrele câtului obținut vor indica aşezarea inițială a zarurilor. Astfel, analizând exemplul de mai sus, vom obține: 254523 : 111 = 2293; 2293 - 7 = 2286; 2286 : 9 = 254.

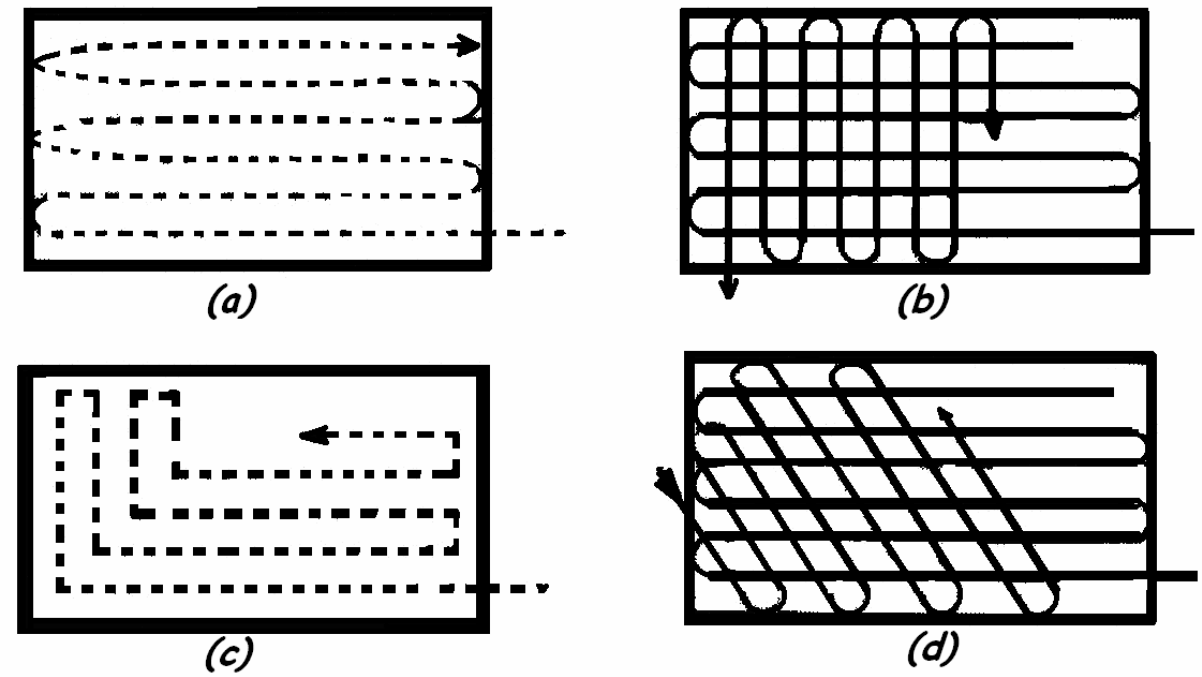
Care este esența matematică a acestui truc?

Capitolul 10 Iscusința geometrică în muncă

299. Geometria însămânțărilor

Acum câțiva ani, a început aplicarea unei metode noi de însămânțare a culturilor cerealiere. În locul însămânțărilor obişnuite în rânduri, s-a folosit metoda aşa-numitelor însămânțări în cruce, iar în ultimul timp, metoda însămânțărilor în cruce şi diagonală. Care este esența însămânțărilor în cruce?

După ce s-au terminat lucrările de pregătire a solului pe ogorul (a) ies semănătorile, care pornesc mai întâi de-a lungul ogorului, însămânțând în rânduri paralele o jumătate din semințele destinate ogorului respectiv; a doua jumătate a semințelor este însămânțată în rânduri perpendiculare pe primele, adică de-a curmezişul ogorului (b). Colhozurile care au folosit pe unele din ogoarele lor metoda însămânțării în cruce au obținut o recoltă de grâu de toamnă mai mare cu 10-12 chintale la hectar decât de pe ogoarele însămânțate prin metoda obişnuită. Atunci când lucrările de pregătire a solului s-au desfăşurat după (a), însămânțarea de-a curmezişul poate fi făcută o dată cu cea longitudinală (cu un al doilea agregat de însămânțare) numai după ce lucrările de pregătire au fost terminate pe întreg ogorul (b).



Iscusința a ajutat să fie înlăturată şi această dificultate. Cultivatoarele cu care este lucrat pământul înainte de însămânțare au fost conduse pe ruta indicată în (c). În felul acesta pământul era lucrat concomitent de-a lungul şi de-a latul ogorului, permițând să se folosească concomitent două agregate de însămânțări care acționau în direcții perpendiculare, urmând de aproape cultivatorul (b).

Marea economie de timp, datorită căreia se reducea serios durata însămânțărilor, compensa micul neajuns specific acestei metode de pregătire a solului pentru însâmânțări (c): capetele ogorului pentru întoarcerea cultivatorului se

micşorează treptat, iar mica porțiune dreptunghiulară rămasă la urmă poate fi greu lucrată cu maşini. Afară de aceasta, cultivatoarele trebuind să fie întoarse nu la marginea câmpului, ci in interiorul lui, vor rămâne la fiecare loc de întoarcere greşuri.

Cum putea fi înlăturat acest neajuns păstrându-se în acelaşi timp avantajele pregătirii solului concomitent cu însămânțarea din două direcții?

Deocamdată, cea mai bună soluție a acestei importante probleme practice este folosirea metodei de însămânțări în cruce şi diagonală. În condițiile acestei metode, cultivatorul cu care se lucrează solul pleacă numai într-o singură direcție, de pildă, în lungul ogorului (a). După el pleacă în aceaşi direcție primul agregat de însămânțări. În clipa în care dreptunghiul parțial însămânțat al ogorului va fi destul de lat (prin urmare cu mult înainte de terminarea lucrării solului cu cultivatorul), se dă drumul unui al doilea agregat de însămânțări, dar nu în unghi drept pe linia de mişcare a cultivatorului, ci în diagonală (d). Alimentarea cu semințe se face din mers, atunci când semănătoarea întoarce la capetele ogorului.

Această geometrie modificată a însămânțărilor este îmbinată de maeştrii recoltelor mari cu calculul normelor de însămânțare, adică al numărului de semințe necesare pentru obținerea celei mai bune densități a plantelor. Ce fel de calcule sunt acestea?

Ele constau în următoarele:

1) se stabileşte în grame greutatea a 1.000 de semințe (de ex: 46 g);

2) se stabileşte în procente capacitatea de încolțire (germinație) a semințelor (de ex: 98%);

3) se stabileşte, în procente, puritatea semințelor (de ex: 96%);

4) se calculează coeficientul valorii economice a semințelor (în procente), el fiind produsul procentului de încolțire cu procentul de puritate, împărțit cu 100; în cazul nostru, coeficientul de valoare economică a semințelor este 94,08%;

5) se stabileşte coeficientul de însămânțare, adică milioanele de semințe care trebuie însămânțate pe un hectar, pentru obținerea celei mai bune densități (de ex: dacă se însămânțează 4.100.000 semințe la hectar, coeficientul de însămânțare va fi 4, 1);

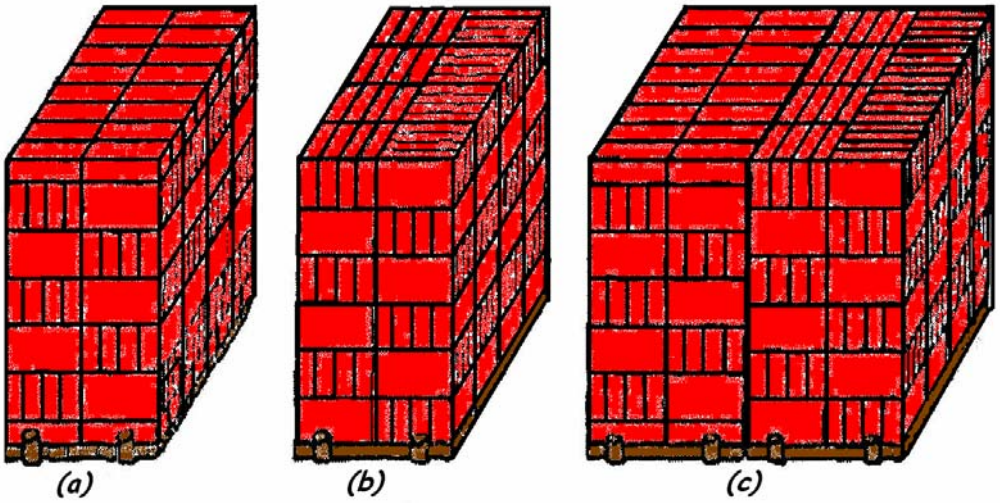
6) greutatea în grame a 1.000 de semințe se înmulțeşte cu coeficientul de însămânțare; rezultatul obținut reprezintă atâtea procente din norma de însămânțare (în kg) cât este coeficientul valorii economice a semințelor (de ex: 1.000 semințe cântăresc 46 g, coeficientul de însămânțare este de 4,1, coeficientul de valoare economică este 94,08%; atunci 46 x 4,1 = 188,6 kg reprezintă 94,08% din norma de însămânțare; de aici rezultă că norma de însămânțare la hectar este de $\frac{188,6 \cdot 100}{94,08} \approx 200$ kg.

Prin urmare, pentru stabilirea normei (în kg) de însămânțare la hectar după numărul de boabe, trebuie să înmulțim greutatea a 1.000 de semințe cu coeficientul de însămânțare, să înmulțim cu 100 şi să împărțim la coeficientul de valoare economică a semințelor.

300. Raționalizarea așezării cărămizilor pentru transport

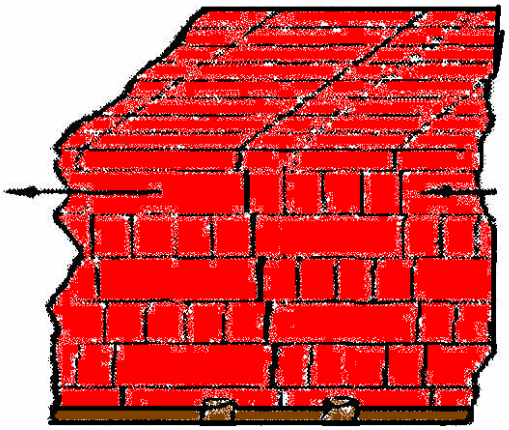
Timp de mulți ani sistemul de transportare a cărămizilor de la fabrici la şantiere cerea un mare volum de muncă şi nu asigura livrarea cărămizilor în bună stare. Cărămizile erau încărcate la fabrică în camion, descărcate pe şantier, apoi aranjate ca să fie duse până la locul de muncă, şi acolo, lângă zidar, erau iarăşi descărcate. După atâtea manipulări, era greu ca ele să rămână întregi. Una din primele propuneri era ca la descărcarea din camion cărămizile să fie aranjate în nişte cutii speciale, numite containere, care puteau fi transportate direct spre locul de muncă al zidarului.

Metoda era excelentă, dar necesita un mare număr de containere, iar costul acestora era destul de ridicat. În locul unui container scump s-a folosit un fund ieftin şi simplu, pe care cărămizile erau aşezate în pachete.



Fundurile cu cărămizi erau fixate în camioane cu ajutorul unor obloane interioare mobile. La destinație pe fiecare pachet era îmbrăcată o cutie specială prevăzută cu cârlige pentru prinderea fundului. Apoi, fundurile cu cărămizi erau ridicate cu o macara până la locul de muncă.

Inițial, pentru aşezarea cărămizilor pe funduri s-au folosit unul din cele două sisteme arătate în figura de mai sus (a), (b). Ivan Pigasovici a recomandat să se folosească ambele metode de aşezare a cărămizilor pe funduri, iar, în vederea transportului, fundurile de cărămizi să fie în aşa fel aranjate în maşină, încât pe două funduri alăturate cărămizile să nu fie aşezate la fel (c).



Care este rostul fizic şi geometric al ultimului sistem de aranjare a fundurilor cu cărămizi în maşină? De ce este el mai indicat decât primul, când nu era folosit decât unul din cele doua sisteme de aşezare?

Atunci când cărămizile erau aşezate în acelaşi fel pe toate fundurile, în timpul transportului cu maşina, forma inițială a pachetelor se strica din cauza şocurilor inevitabile; în timpul drumului cărămizile se deplasau în direcția mersului camionului (cărămizile de la margine pătrundeau parțial în pachetul învecinat, ceea ce crea dificultăți la descărcare; dacă însă cărămizile aşezate pe două funduri alăturate sunt aranjate în sisteme diferite, difuziunea lor este imposibilă, căci începând cu rândul al doilea marginile inferioare ale cărămizilor din cele două pachete nu sunt la acelaşi nivel.